Аффинная геометрия

10 класс

22.10.2016

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно взаимно однозначно, непрерывно и образом любой прямой является прямая.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.

2. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, где A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D соответственно при аффинном преобразовании.

В качестве следствия получаем, что аффинное преобразование корректно определено на векторах.

3. (*Аффинное преобразование линейно действует на векторы*) Докажите, что а) $(\vec{u}+\vec{v})' = \vec{u}' + \vec{v}'$; б) $(q \cdot \vec{u})' = q \cdot \vec{u}'$ для любого $q \in \mathbb{Q}$; в) $(\lambda \cdot \vec{u})' = \lambda \cdot \vec{u}'$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ (`в последнем пункте используйте непрерывность`).

Следствие: аффинные преобразования на каждой прямой сохраняют отношения отрезков.

4. *Репéром* называется набор из точки и двух неколлинеарных векторов. На плоскости даны два репера. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее один репер в другой.

Эта задача вместе со свойством линейности позволяет дать следующее «боевое» эквивалентное определение аффинного преобразования: если есть две системы координат, то образ точки имеет такие же координаты во второй системе, как сама точка в первой.

5. На плоскости задана декартова не обязательно прямоугольная система координат. Докажите, что класс преобразований, заданных формулами вида $x' = ax + by + x_0$, $y' = cx + dy + y_0$, где $ad - bc \neq 0$, совпадает с классом аффинных преобразований.

6. Докажите, что аффинные преобразования сохраняют отношения площадей многоугольников.

---

7. Докажите, что любые два треугольника аффинно эквивалентны.

8. Докажите, что два четырехугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда диагонали этих четырехугольников делятся точками пересечения в соответственно равных отношениях.

9. В трапеции $ABCD$ на диагоналях AC и BD отметили такие точки P и Q, что $BP \parallel CD$ и $CQ \parallel AB$. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

10. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Каждая точка деления соединена с противоположной вершиной треугольника. Докажите, что в образованном этими прямыми шестиугольнике диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

11. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC даны точки M, N, P. На сторонах CA, AB, BC построены соответственно точки M_1, N_1, P_1 так, что $(MM_1) \parallel (BC), (NN_1) \parallel (CA), (PP_1) \parallel (AB)$. Докажите, что треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равновелики.

12. Дан параллелограмм $ABCD$. Произвольная прямая пересекает лучи AB, AC, A соответственно в точках P, Q, R. Докажите, что $\frac{AB}{AP} + \frac{AD}{AR} = \frac{AC}{AQ}$.

13. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Пусть b, c, d — прямые, проходящие через B, C, D параллельно прямым KL, KM, ML соответственно. Докажите, что прямые b, c, d проходят через одну точку.

14. Докажите, что если у выпуклого пятиугольника каждая сторона параллельна одной из его диагоналей, то его можно аффинным преобразование перевести в правильный.