

Теорема Дезарга

10 класс
01.10.2016

Теорема. (Дезарг) На проективной плоскости даны шесть различных точек A, B, C, A', B', C' . Прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения пар прямых AB и $A'B', BC$ и $B'C', CA$ и $C'A'$ лежат на одной прямой.

1. Чевяны AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P . Докажите, что точки пересечения пар прямых BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, AB и A_1B_1 лежат на одной прямой. Эта прямая называется *трилинейной полярной* точки P .
2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что шестиугольник, образованный пересечением треугольников ACE и BDF , вписан в окружность. Докажите, что AD, BE, CF пересекаются в одной точке.
3. Середина основания трапеции соединена с вершинами другого основания. Эти прямые пересекают диагонали трапеции в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям и ее отрезок, заключенный между боковыми сторонами трапеции, делится точками P и Q на три равные части.
4. В углы A, B, C треугольника ABC вписаны круги $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ соответственно, касающиеся друг друга внешним образом в точках A', B', C' (ω_A и ω_B касаются друг друга в точке C'). Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.
5. В треугольнике ABC проведены чевианы BB_1 и CC_1 . Докажите, что прямые, соединяющие середины отрезков AB и AC, AB_1 и AC_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
6. Даны две параллельные прямые и не принадлежащая им точка. Пользуясь только одной линейкой (без циркуля), проведите через данную точку прямую, параллельную данным прямым.
7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ с соотношением $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ (т.е. *гармонический*). Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников ACB и ACD , проходит через точку пересечения внешних биссектрис углов BAD и BCD .
8. На описанной окружности треугольника ABC отмечены точки P и Q . Точка A' на стороне BC такова, что прямые PA' и QA' симметричны относительно прямой BC . Аналогично определяются точки B', C' . Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой.