9 класс **Ладейные многочлены** 15 мая 2017

Для произвольной доски C, то есть произвольного набора клеток в клетчатой плоскости, вычислим при каждом n количество способов r_n поставить на эту доску n не бьющих друг друга ладей. (Мы считаем, что ладья бьет все клетки плоскости, находящиеся с ней на одной горизонтали или одной вертикали.) Положим $r_0 = 1$. Выражение

$$R(x, C) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

называется *ладейным многочленом* доски C, а сами коэффициенты r_k — ладейными числами. Доски, у которых ладейные многочлены совпадают, будем называть эквивалентными.

Мы будем рассматривать доски специального вида — диаграммы Юнга. Диаграмма Юнга со строками b_1, b_2, $\ldots$, b_m $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant bm$ — это доска, горизонтали которой выровнены по левому краю и содержат соответственно (снизу вверх) b_1, b_2, $\ldots$, b_m клеток. Иногда мы будем считать, что диграмма Юнга может иметь нулевые строки.

0. Докажите, что количество способов поставить на доску 100×100 максимально возможное число не бьющих друг друга слонов — точный квадрат.

1. Докажите, что эквивалентные доски имеют одинаковые площади.

2. Придумайте квадратный трехчлен с натуральными коэффициентами, не являющийся ладейным.

3. Сколькими способами можно расставить на доске 8×8 трех небьющих друг друга ладей?

4. Сколькими способами можно расставить на доске 8×8 четырех небьющих друг друга ладей, ни одна из которых не стоит на главной диагонали?

5. Докажите, что если доска C представляет собой объединение двух не связанных ходом ладьи частей C_1 и C_2, то $R(x, C) = R(x, C1)R(x, C2)$.

6. Пусть c — произвольная клетка доски C, $C_1 = C\backslash\{c\}$, C_2 — доска, полученная удалением из C всех клеток, находящихся в одной строке или одном столбце с клеткой c (включая клетку c). Докажите, что $R(x, C) = R(x, C1) + xR(x, C2)$.

7. Найдите какую-нибудь связную относительно хода ладьи доску B, у которой $r_5(B) = 2017$.

8. Придумайте пару эквивалентных десятиклеточных досок, не сводящихся друг к другу перестановкой строк или столбцов и поворотами.

9. Пусть T_n — диаграмма Юнга со строками 1, 2, 3, $\ldots$, $n-1$. Докажите, что T_n не эквивалентна никакой другой диаграмме Юнга.

10. Докажите, что квадратная доска $n \times n$ эквивалентна доске Y_n в форме диаграммы Юнга с длинами строк 1, 3, 5, $\ldots$, $2n-1$.

9 класс **Ладейные многочлены** 15 мая 2017

Для произвольной доски C, то есть произвольного набора клеток в клетчатой плоскости, вычислим при каждом n количество способов r_n поставить на эту доску n не бьющих друг друга ладей. (Мы считаем, что ладья бьет все клетки плоскости, находящиеся с ней на одной горизонтали или одной вертикали.) Положим $r_0 = 1$. Выражение

$$R(x, C) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

называется *ладейным многочленом* доски C, а сами коэффициенты r_k — ладейными числами. Доски, у которых ладейные многочлены совпадают, будем называть эквивалентными.

Мы будем рассматривать доски специального вида — диаграммы Юнга. Диаграмма Юнга со строками b_1, b_2, $\ldots$, b_m $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant bm$ — это доска, горизонтали которой выровнены по левому краю и содержат соответственно (снизу вверх) b_1, b_2, $\ldots$, b_m клеток. Иногда мы будем считать, что диграмма Юнга может иметь нулевые строки.

0. Докажите, что количество способов поставить на доску 100×100 максимально возможное число не бьющих друг друга слонов — точный квадрат.

1. Докажите, что эквивалентные доски имеют одинаковые площади.

2. Придумайте квадратный трехчлен с натуральными коэффициентами, не являющийся ладейным.

3. Сколькими способами можно расставить на доске 8×8 трех небьющих друг друга ладей?

4. Сколькими способами можно расставить на доске 8×8 четырех небьющих друг друга ладей, ни одна из которых не стоит на главной диагонали?

5. Докажите, что если доска C представляет собой объединение двух не связанных ходом ладьи частей C_1 и C_2, то $R(x, C) = R(x, C1)R(x, C2)$.

6. Пусть c — произвольная клетка доски C, $C_1 = C\backslash\{c\}$, C_2 — доска, полученная удалением из C всех клеток, находящихся в одной строке или одном столбце с клеткой c (включая клетку c). Докажите, что $R(x, C) = R(x, C1) + xR(x, C2)$.

7. Найдите какую-нибудь связную относительно хода ладьи доску B, у которой $r_5(B) = 2017$.

8. Придумайте пару эквивалентных десятиклеточных досок, не сводящихся друг к другу перестановкой строк или столбцов и поворотами.

9. Пусть T_n — диаграмма Юнга со строками 1, 2, 3, $\ldots$, $n-1$. Докажите, что T_n не эквивалентна никакой другой диаграмме Юнга.

10. Докажите, что квадратная доска $n \times n$ эквивалентна доске Y_n в форме диаграммы Юнга с длинами строк 1, 3, 5, $\ldots$, $2n-1$.