9 класс **Интерполяция** 13 апреля 2017

1. Числа a, b, c различны. Не раскрывая скобок, докажите тождество

$$c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x^2.$$

2. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — действительные числа. Постройте многочлен $P_i(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющий условиям $P_i(x_i)=1$ и $P_i(x_j)=0$ при $i \neq j$.

3. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — действительные числа. Докажите, что для любых $y_1, y_2, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше $n-1$ такой, что $P(x_i)=y_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, причём его формула имеет вид

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i\frac{x-x_1}{x_i-x_1}\cdot\ldots\cdot\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\cdot\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{x-x_n}{x_i-x_n}.$$

4. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые 4 из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

5. У некоторого многочлена не все коэффициенты рациональны. Может ли он принимать во всех рациональных точках рациональные значения?

6. Многочлен $P(x)$ степени 10 таков, что $P(1)=P(-1)$, $\ldots$, $P(5)=P(-5)$. Докажите, что $P(x)=P(-x)$ для любого x.

7. Многочлен $P(x)$ степени n принимает во всех целых точках целые значения. Докажите, что $n!P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

9 класс **Интерполяция** 13 апреля 2017

1. Числа a, b, c различны. Не раскрывая скобок, докажите тождество

$$c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x^2.$$

2. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — действительные числа. Постройте многочлен $P_i(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющий условиям $P_i(x_i)=1$ и $P_i(x_j)=0$ при $i \neq j$.

3. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — действительные числа. Докажите, что для любых $y_1, y_2, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше $n-1$ такой, что $P(x_i)=y_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, причём его формула имеет вид

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i\frac{x-x_1}{x_i-x_1}\cdot\ldots\cdot\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\cdot\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{x-x_n}{x_i-x_n}.$$

4. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые 4 из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

5. У некоторого многочлена не все коэффициенты рациональны. Может ли он принимать во всех рациональных точках рациональные значения?

6. Многочлен $P(x)$ степени 10 таков, что $P(1)=P(-1)$, $\ldots$, $P(5)=P(-5)$. Докажите, что $P(x)=P(-x)$ для любого x.

7. Многочлен $P(x)$ степени n принимает во всех целых точках целые значения. Докажите, что $n!P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.