9 класс | Биссектрисы и середины дуг | 10 апреля 2017

В задачах 1, 2, 4, 6, 7, 8 мы живём в следующей картинке. Дан треугольник ABC, I — его центр вписанной окружности. I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающиеся сторон BC, AC и AB соответственно. A_1, B_1, C_1, A' — середины дуг BC, AC, AB, BAC описанной окружности треугольника ABC.

1. a) *Лемма о трезубце.* Докажите, что $A_1B = A_1I = A_1C = A_1I_a$.
b) Докажите, что $A'B = A'C = A'I_b = A'I_c$.

2. Пусть B_1 и C_1 — середины дуг AC и AB описанной окружности треугольника ABC. Прямая B_1C_1 пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AXIY$ — ромб.

3. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой — точки B и C, причем точка B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA и OC треугольника AOC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC — равнобедренный.

4. Описанная окружность треугольника BIC вторично пересекает прямые AB и AC в точках E и F. Докажите, что EF касается вписанной окружности треугольника ABC.

5. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки P и Q соответственно так, что $AC = QC = PA$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABQ и CBP пересекаются на биссектрисе угла B.

6. Пусть $AB > AC$. X — проекция точки A' на сторону AB. Докажите, что $BX = AX + CX$.

7. Из вершин B и C остроугольного треугольника с постоянными одинаковыми скоростями «выехали» точки X и Y по прямым AB и AC соответственно. Докажите, что точки X и Y всё время равноудалены либо от точки A_1, либо от точки A'.

8. Пусть $AB < AC$. M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle IMB = \angle IA'A$.

9 класс | Биссектрисы и середины дуг | 10 апреля 2017

В задачах 1, 2, 4, 6, 7, 8 мы живём в следующей картинке. Дан треугольник ABC, I — его центр вписанной окружности. I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающиеся сторон BC, AC и AB соответственно. A_1, B_1, C_1, A' — середины дуг BC, AC, AB, BAC описанной окружности треугольника ABC.

1. a) *Лемма о трезубце.* Докажите, что $A_1B = A_1I = A_1C = A_1I_a$.
b) Докажите, что $A'B = A'C = A'I_b = A'I_c$.

2. Пусть B_1 и C_1 — середины дуг AC и AB описанной окружности треугольника ABC. Прямая B_1C_1 пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AXIY$ — ромб.

3. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой — точки B и C, причем точка B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA и OC треугольника AOC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC — равнобедренный.

4. Описанная окружность треугольника BIC вторично пересекает прямые AB и AC в точках E и F. Докажите, что EF касается вписанной окружности треугольника ABC.

5. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки P и Q соответственно так, что $AC = QC = PA$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABQ и CBP пересекаются на биссектрисе угла B.

6. Пусть $AB > AC$. X — проекция точки A' на сторону AB. Докажите, что $BX = AX + CX$.

7. Из вершин B и C остроугольного треугольника с постоянными одинаковыми скоростями «выехали» точки X и Y по прямым AB и AC соответственно. Докажите, что точки X и Y всё время равноудалены либо от точки A_1, либо от точки A'.

8. Пусть $AB < AC$. M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle IMB = \angle IA'A$.