9 класс | Показатели | 23 марта 2017

Определение. *Показателем* целого числа a по модулю натурального n (при условии, что a и n взаимно просты) называется наименьшее натуральное t такое, что $a^d \equiv 1 \mod n$.

1. a) Докажите, что $a^k \equiv 1 \mod n$ тогда и только тогда, когда k делится на d.
b) Докажите, что $a^k \equiv a^m \mod n$ тогда и только тогда, когда $k-m$ делится на d.
c) Докажите, что $\varphi(n)$ делится на d.

2. a) Докажите, что любой простой делитель числа 2^q-1, где q — простое, сравним с 1 по модулю q.
b) Выведите из предыдущего пункта, что простых чисел бесконечно много.

3. Пусть p и q — простые, $q>5$. Известно, что 2^p+3^p делится на q. Докажите, что $q>2p$.

4. Докажите, что $\varphi(a^n-1)$ делится на n для натуральных a и n.

5. Докажите, что любой делитель числа $2^{2^n}+1$ представим в виде $2^{n+1}k+1$, где $k \in \mathbb{N}$.

6. Найдите все такие натуральные n, что 2^n-1 делится на n.

7. Пусть $a>1$, $p>2$ и p — простое. Докажите, что простые нечетные делители a^p-1 или делят $a-1$ или сравнимы с 1 по модулю $2p$.

8. Докажите, что число $\frac{a^p-1}{a-1}$ имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $a-1$.

9 класс | Показатели | 23 марта 2017

Определение. *Показателем* целого числа a по модулю натурального n (при условии, что a и n взаимно просты) называется наименьшее натуральное t такое, что $a^d \equiv 1 \mod n$.

1. a) Докажите, что $a^k \equiv 1 \mod n$ тогда и только тогда, когда k делится на d.
b) Докажите, что $a^k \equiv a^m \mod n$ тогда и только тогда, когда $k-m$ делится на d.
c) Докажите, что $\varphi(n)$ делится на d.

2. a) Докажите, что любой простой делитель числа 2^q-1, где q — простое, сравним с 1 по модулю q.
b) Выведите из предыдущего пункта, что простых чисел бесконечно много.

3. Пусть p и q — простые, $q>5$. Известно, что 2^p+3^p делится на q. Докажите, что $q>2p$.

4. Докажите, что $\varphi(a^n-1)$ делится на n для натуральных a и n.

5. Докажите, что любой делитель числа $2^{2^n}+1$ представим в виде $2^{n+1}k+1$, где $k \in \mathbb{N}$.

6. Найдите все такие натуральные n, что 2^n-1 делится на n.

7. Пусть $a>1$, $p>2$ и p — простое. Докажите, что простые нечетные делители a^p-1 или делят $a-1$ или сравнимы с 1 по модулю $2p$.

8. Докажите, что число $\frac{a^p-1}{a-1}$ имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $a-1$.