

1. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

2. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

3. В турнире по футболу участвует $2n$ команд ($n > 1$). В каждом туре команды разбиваются на n пар, и команды в каждой паре играют между собой. Так провели $2n - 1$ тур, по окончании которых каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за поражение 0 очков. Оказалось, что для каждой команды отношение набранных ей очков к количеству сыгранных ей игр после последнего тура не изменилось. Докажите, что все команды сыграли вничью все партии.

4. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k , что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

5. В клетках таблицы $n \times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

6. В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен, общей высотой в 30 этажей. Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

7. В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно 3 языка, причем для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k . Оказалось, что $11n \leq k \leq \frac{m}{2}$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.

1. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

2. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

3. В турнире по футболу участвует $2n$ команд ($n > 1$). В каждом туре команды разбиваются на n пар, и команды в каждой паре играют между собой. Так провели $2n - 1$ тур, по окончании которых каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за поражение 0 очков. Оказалось, что для каждой команды отношение набранных ей очков к количеству сыгранных ей игр после последнего тура не изменилось. Докажите, что все команды сыграли вничью все партии.

4. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k , что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

5. В клетках таблицы $n \times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

6. В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен, общей высотой в 30 этажей. Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

7. В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно 3 языка, причем для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k . Оказалось, что $11n \leq k \leq \frac{m}{2}$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.