9 класс **Алгебраический разнобой** 6 марта 2017

1. Сумма трех положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

2. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n — натуральное число.

3. Известно, что сумма любых двух из трех квадратных трехчленов x^2+ax+b, x^2+cx+d, x^2+ex+f не имеет корней. Может ли сумма всех этих трехчленов иметь корни?

4. Квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

5. Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций $y=2a+\frac{1}{x-b}$ и $y=2c+\frac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y=2b+\frac{1}{x-a}$ и $y=2d+\frac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку.

6. Дано n палочек. Из любых трёх можно сложить тупоугольный треугольник. Каково наибольшее возможное значение n?

7. По целому числу a построим последовательность $a_1=a$, $a_2=1+a_1$, $a_3=1+a_1a_2$, $a_4=1+a_1a_2a_3$, ... (каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности ее соседнних членов $(a_{n+1}-a_n)$ — квадраты целых чисел.

8. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеет 4 положительных корня с учетом кратности (т.е. сумма кратностей всех положительных корней этого уравнения равна 4). Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

9 класс **Алгебраический разнобой** 6 марта 2017

1. Сумма трех положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

2. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n — натуральное число.

3. Известно, что сумма любых двух из трех квадратных трехчленов x^2+ax+b, x^2+cx+d, x^2+ex+f не имеет корней. Может ли сумма всех этих трехчленов иметь корни?

4. Квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

5. Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций $y=2a+\frac{1}{x-b}$ и $y=2c+\frac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y=2b+\frac{1}{x-a}$ и $y=2d+\frac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку.

6. Дано n палочек. Из любых трёх можно сложить тупоугольный треугольник. Каково наибольшее возможное значение n?

7. По целому числу a построим последовательность $a_1=a$, $a_2=1+a_1$, $a_3=1+a_1a_2$, $a_4=1+a_1a_2a_3$, ... (каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности ее соседнних членов $(a_{n+1}-a_n)$ — квадраты целых чисел.

8. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеет 4 положительных корня с учетом кратности (т.е. сумма кратностей всех положительных корней этого уравнения равна 4). Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.