9 класс — **Числовой разнобой** — 16 февраля 2017

1. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 2(x + y) + xy$.

2. Известно, что пятизначное число $\overline{abcde}$ делится на 41. Докажите, что, если цифры числа $\overline{abcde}$ циклически переставить, то получившееся число тоже делится на 41. (То есть надо доказать, что числа $\overline{bcdea}$, $\overline{cdeab}$, $\overline{deabc}$, $\overline{eabcd}$ делятся на 41.)

3. Алексей Вадимович выбирает натуральное число n, вычисляет числа $a = n^2 + 5$ и $b = (n + 1)^2 + 5$, а затем находит их наибольший общий делитель. Какое наибольшее число он может получить?

4. Сколько существует троек чисел x, y, z таких, что $x + y + z$ и $x^2 + y^2 + z^2$ делится на 61?

5. Все числа p, $p + 2$, $p + 2^n$, $p + 2^n + 2$ — простые. При каких натуральных n это возможно?

6. Натуральные числа $x, y > 1$ таковы, что $x^2 + y^2 - 1$ делится на $x + y - 1$. Докажите, что $x + y - 1$ не является простым.

7. Докажите, что существует бесконечно много троек последовательных натуральных чисел, не делящихся на квадраты простых чисел.

8. Пусть p — простое число, a и n — натуральные числа такие, что $\frac{p^a-1}{p-1} = 2^n$. Каким может быть количество натуральных делителей числа na?

9 класс — **Числовой разнобой** — 16 февраля 2017

1. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 2(x + y) + xy$.

2. Известно, что пятизначное число $\overline{abcde}$ делится на 41. Докажите, что, если цифры числа $\overline{abcde}$ циклически переставить, то получившееся число тоже делится на 41. (То есть надо доказать, что числа $\overline{bcdea}$, $\overline{cdeab}$, $\overline{deabc}$, $\overline{eabcd}$ делятся на 41.)

3. Алексей Вадимович выбирает натуральное число n, вычисляет числа $a = n^2 + 5$ и $b = (n + 1)^2 + 5$, а затем находит их наибольший общий делитель. Какое наибольшее число он может получить?

4. Сколько существует троек чисел x, y, z таких, что $x + y + z$ и $x^2 + y^2 + z^2$ делится на 61?

5. Все числа p, $p + 2$, $p + 2^n$, $p + 2^n + 2$ — простые. При каких натуральных n это возможно?

6. Натуральные числа $x, y > 1$ таковы, что $x^2 + y^2 - 1$ делится на $x + y - 1$. Докажите, что $x + y - 1$ не является простым.

7. Докажите, что существует бесконечно много троек последовательных натуральных чисел, не делящихся на квадраты простых чисел.

8. Пусть p — простое число, a и n — натуральные числа такие, что $\frac{p^a-1}{p-1} = 2^n$. Каким может быть количество натуральных делителей числа na?