

1. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ точка O — точка пересечения диагоналей. Точка O_1 симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности четырёхугольника. Докажите, что O_1O — биссектриса угла BO_1C .

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . Пусть I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что CI перпендикулярно I_1I_2 .

3. В равнобедренном треугольнике ABC из середины основания AB к боковой стороне AC проведен отрезок DE — биссектриса угла ADC . Из точки E на боковую сторону BC опущена высота EF . Докажите, что отрезок FD является биссектрисой угла EFB .

4. В треугольнике ABC угол B равен 120 . Пусть A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис. Докажите, что угол $A_1B_1C_1$ прямой.

5. Из центров вневписанных окружностей провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти три прямых пересекаются в одной точке.

6. В прямоугольном треугольнике с прямым углом C проведены триссектрисы AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 , причем точки A_2 и B_2 лежат на отрезках CA_1 и CB_1 соответственно. Пусть P — точка пересечения AA_2 и BB_2 , Q — точка пересечения AA_1 и BB_1 . Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника QA_2B_2 .

7. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина CD . Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM , а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD . Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD .

8. В треугольнике ABC на биссектрисе AA_1 выбрана точка O так, что $\angle OBC = \angle A + \angle C$. Пусть B_1 и C_1 — точки пересечения прямых BO и CO со сторонами AC и AB соответственно. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

1. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ точка O — точка пересечения диагоналей. Точка O_1 симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности четырёхугольника. Докажите, что O_1O — биссектриса угла BO_1C .

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . Пусть I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что CI перпендикулярно I_1I_2 .

3. В равнобедренном треугольнике ABC из середины основания AB к боковой стороне AC проведен отрезок DE — биссектриса угла ADC . Из точки E на боковую сторону BC опущена высота EF . Докажите, что отрезок FD является биссектрисой угла EFB .

4. В треугольнике ABC угол B равен 120 . Пусть A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис. Докажите, что угол $A_1B_1C_1$ прямой.

5. Из центров вневписанных окружностей провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти три прямых пересекаются в одной точке.

6. В прямоугольном треугольнике с прямым углом C проведены триссектрисы AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 , причем точки A_2 и B_2 лежат на отрезках CA_1 и CB_1 соответственно. Пусть P — точка пересечения AA_2 и BB_2 , Q — точка пересечения AA_1 и BB_1 . Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника QA_2B_2 .

7. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина CD . Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM , а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD . Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD .

8. В треугольнике ABC на биссектрисе AA_1 выбрана точка O так, что $\angle OBC = \angle A + \angle C$. Пусть B_1 и C_1 — точки пересечения прямых BO и CO со сторонами AC и AB соответственно. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.