9 класс **Теорема Птолемея** 6 февраля 2017

Теорема Птолемея. В произвольном четырёхугольнике сумма произведений длин противоположных сторон не меньше произведения длин диагоналей, причём равенство возможно тогда и только тогда, когда четырёхугольник вписанны.

1. Равнобедренный остроугольный треугольник ABC ($CA = CB$) вписан в окружность с центром O, на малой дуге AB лежит точка M. Докажите, что $\frac{MA+MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

2. Используя теорему Птолемея, докажите теорему Пифагора.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Известно, что $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$.
a) Докажите, что $BD = AC \sin \angle BAD$.
b) Пусть α, β — острые углы. Используя теорему Птолемея, докажите, что $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

4. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ — правильный $(2n+1)$-угольник, точка M лежит на малой дуге $A_{2n+1}A_1$ описанной около этого многоугольника окружности. Докажите, что

$$MA_1 + MA_3 + \ldots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_4 + \ldots + MA_{2n}.$$

5. Пусть $ABCD$ — тетраэдр. Докажите, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD$.

6. Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$, $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$. Пусть G и H — точки внутри шестиугольника такие, что $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$. Докажите, что $AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$.

7. Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC, пусть d_a, d_b, d_c — расстояния от точки P соответственно до сторон BC, AC, AB. Докажите, что $PA + PB + PC \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$.

8. Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ не больше 30°.

9 класс **Теорема Птолемея** 6 февраля 2017

Теорема Птолемея. В произвольном четырёхугольнике сумма произведений длин противоположных сторон не меньше произведения длин диагоналей, причём равенство возможно тогда и только тогда, когда четырёхугольник вписанны.

1. Равнобедренный остроугольный треугольник ABC ($CA = CB$) вписан в окружность с центром O, на малой дуге AB лежит точка M. Докажите, что $\frac{MA+MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

2. Используя теорему Птолемея, докажите теорему Пифагора.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Известно, что $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$.
a) Докажите, что $BD = AC \sin \angle BAD$.
b) Пусть α, β — острые углы. Используя теорему Птолемея, докажите, что $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

4. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ — правильный $(2n+1)$-угольник, точка M лежит на малой дуге $A_{2n+1}A_1$ описанной около этого многоугольника окружности. Докажите, что

$$MA_1 + MA_3 + \ldots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_4 + \ldots + MA_{2n}.$$

5. Пусть $ABCD$ — тетраэдр. Докажите, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD$.

6. Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$, $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$. Пусть G и H — точки внутри шестиугольника такие, что $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$. Докажите, что $AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$.

7. Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC, пусть d_a, d_b, d_c — расстояния от точки P соответственно до сторон BC, AC, AB. Докажите, что $PA + PB + PC \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$.

8. Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ не больше 30°.