9 класс **Готовимся к регионалке 2** 26 января 2017

1. Даны действительные числа x, y, z. Докажите, что одно из чисел $x^2 + 2xy + z^2$, $y^2 + 2yz + x^2$, $z^2 + 2zx + y^2$ неотрицательно.

2. В стране 10 городов. Любая пара городов связана либо автобусным, либо железнодорожным, либо авиасообщением. Могло ли так случиться, что в стране нет трёх городов, связанных друг с другом прямыми рейсами одного и того же вида транспорта?

3. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

4. Можно ли выбрать 100 последовательных четных чисел и разбить их на пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_{50}, b_{50}) так, чтобы каждое из уравнений $x^2 + a_1x + b_1 = 0$, $x^2 + a_2x + b_2 = 0$, …, $x^2 + a_{50}x + b_{50} = 0$ имело целые корни?

5. На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?

6. Сумма действительных чисел x, y и z равна 3, а сумма их попарных произведений равна a. Докажите неравенство $(x-1)^2 \leqslant 4(1-a/3)$.

7. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC, DBC, ACB и ADB образовывали ромб, то $AB = CD$.

8. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

9. Восстановите треугольник ABC по вершине B, точке пересечения медиан и точке пересечения симедианы из B с описанной окружностью.

10. На плоскости дано несколько точек, попарные расстояния между которыми не превосходят 1. Докажите, что эти точки можно покрыть правильным треугольником со стороной $\sqrt{3}$.

9 класс **Готовимся к регионалке 2** 26 января 2017

1. Даны действительные числа x, y, z. Докажите, что одно из чисел $x^2 + 2xy + z^2$, $y^2 + 2yz + x^2$, $z^2 + 2zx + y^2$ неотрицательно.

2. В стране 10 городов. Любая пара городов связана либо автобусным, либо железнодорожным, либо авиасообщением. Могло ли так случиться, что в стране нет трёх городов, связанных друг с другом прямыми рейсами одного и того же вида транспорта?

3. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

4. Можно ли выбрать 100 последовательных четных чисел и разбить их на пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_{50}, b_{50}) так, чтобы каждое из уравнений $x^2 + a_1x + b_1 = 0$, $x^2 + a_2x + b_2 = 0$, …, $x^2 + a_{50}x + b_{50} = 0$ имело целые корни?

5. На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?

6. Сумма действительных чисел x, y и z равна 3, а сумма их попарных произведений равна a. Докажите неравенство $(x-1)^2 \leqslant 4(1-a/3)$.

7. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC, DBC, ACB и ADB образовывали ромб, то $AB = CD$.

8. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

9. Восстановите треугольник ABC по вершине B, точке пересечения медиан и точке пересечения симедианы из B с описанной окружностью.

10. На плоскости дано несколько точек, попарные расстояния между которыми не превосходят 1. Докажите, что эти точки можно покрыть правильным треугольником со стороной $\sqrt{3}$.