9 класс | Таблички | 19 января 2017

1. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

2. Дана таблица размером 8×8, изображающая шахматную доску. За каждый шаг разрешается поменять местами любые два столбца или любые две строки. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя половина — чёрной?

3. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

4. Докажите, что если в $3n$ клетках таблицы $2n \times 2n$ расставлены $3n$ звездочек, то можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, что все звездочки будут вычеркнуты.

5. В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$ — количество столбцов) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

6. В клетках доски $n \times n$ произвольно расставлены числа от 1 до n^2. Докажите, что найдутся две такие соседние клетки (имеющие общую вершину или общую сторону), что стоящие в них числа отличаются не меньше чем на $n + 1$.

7. В клетках таблицы $n \times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

8. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

9 класс | Таблички | 19 января 2017

1. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

2. Дана таблица размером 8×8, изображающая шахматную доску. За каждый шаг разрешается поменять местами любые два столбца или любые две строки. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя половина — чёрной?

3. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

4. Докажите, что если в $3n$ клетках таблицы $2n \times 2n$ расставлены $3n$ звездочек, то можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, что все звездочки будут вычеркнуты.

5. В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$ — количество столбцов) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

6. В клетках доски $n \times n$ произвольно расставлены числа от 1 до n^2. Докажите, что найдутся две такие соседние клетки (имеющие общую вершину или общую сторону), что стоящие в них числа отличаются не меньше чем на $n + 1$.

7. В клетках таблицы $n \times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

8. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?