9 класс **Многочлены** 16 января 2017

1. Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b, c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ имеет корень.

2. Даны корни x_0 и x_1, x_0 и x_2, …, x_0 и x_n квадратных трехчленов $y=x^2+a_1x+b_1$, $y=x^2+a_2x+b_2$, …, $y=x^2+a_nx+b_n$. Найдите корни квадратного трехчлена $y=x^2+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}x+\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$.

3. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами такой, что $P(x^3+x)\geqslant P(x^2+1)$ для всех действительных x. Найдите сумму корней $P(x)$.

4. Даны два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что каждое из выражений $3f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ — квадратные трехчлены, имеющие ровно один корень. Известно также, что $f(x)$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $g(x)$ не имеет корней.

5. Докажите, что многочлен $x^p+x^{p-1}+\ldots+x+p=0$, где p — простое число, не имеет рациональных корней.

6. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие условиям $P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$, $P(2)=2$.

7. Бесконечная последовательность $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$, … определена как

$$P_0(x)=x, \qquad P_n(x)=P_{n-1}(x-1)\cdot P_{n-1}(x+1), \;\; n\geqslant 1.$$

Найдите наибольшее k такое, что $P_{2017}(x)$ делится на x^k.

8. Пусть $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$ при $x\in[-1,1]$. Найдите максимум выражения $a^2+b^2+c^2$.

9. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Докажите, что $f(f(x))=x$ не может иметь ровно три действительных корня.

9 класс **Многочлены** 16 января 2017

1. Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b, c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ имеет корень.

2. Даны корни x_0 и x_1, x_0 и x_2, …, x_0 и x_n квадратных трехчленов $y=x^2+a_1x+b_1$, $y=x^2+a_2x+b_2$, …, $y=x^2+a_nx+b_n$. Найдите корни квадратного трехчлена $y=x^2+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}x+\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$.

3. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами такой, что $P(x^3+x)\geqslant P(x^2+1)$ для всех действительных x. Найдите сумму корней $P(x)$.

4. Даны два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что каждое из выражений $3f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ — квадратные трехчлены, имеющие ровно один корень. Известно также, что $f(x)$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $g(x)$ не имеет корней.

5. Докажите, что многочлен $x^p+x^{p-1}+\ldots+x+p=0$, где p — простое число, не имеет рациональных корней.

6. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие условиям $P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$, $P(2)=2$.

7. Бесконечная последовательность $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$, … определена как

$$P_0(x)=x, \qquad P_n(x)=P_{n-1}(x-1)\cdot P_{n-1}(x+1), \;\; n\geqslant 1.$$

Найдите наибольшее k такое, что $P_{2017}(x)$ делится на x^k.

8. Пусть $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$ при $x\in[-1,1]$. Найдите максимум выражения $a^2+b^2+c^2$.

9. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Докажите, что $f(f(x))=x$ не может иметь ровно три действительных корня.