9 класс **Числовой разнобой** 12 января 2017

0. Можно ли разбить натуральные числа от 1 до 2017 на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равна произведению чисел в другой группе.

1. При каких натуральных n число $n^{10}+n^5+1$ является простым?

2. Докажите, что уравнение $x^2+y^2=z^n$, где n — натуральное, всегда имеет ненулевое целочисленное решение.

3. Найдите все пары натуральных чисел таких, что их сумма делит их произведение.

4. Докажите, что существует бесконечно много треугольных чисел, являющихся полными квадратами.

5. Пусть x, y, z, $n>2$ — натуральные числа, такие что $x^n+y^n=z^n$. Покажите, что если $p=2n+1$ — простое, то $2n+1$ делит хотя бы одно из чисел x, y, z.

6. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел не может быть ни квадратом, ни кубом целого числа.

7. Для любой пары натуральных (a,b) покажите, что существует бесконечно много пар натуральных (A,B) таких, что $\varphi(A)\equiv 0 \mod a$, $\varphi(B)\equiv 0 \mod b$, $\varphi(A+B+AB)\equiv 0 \mod ab$, где φ означает φ-функцию Эйлера.

8. Пусть a и b — взаимно простые числа. Докажите, что существуют натуральные m и n такие, что $a^m+b^n\equiv 1 \mod ab$.

9. Для каждого натурального $n>1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число d_n+d_{n+1} является точным квадратом.

10. Пусть x, y, n — натуральные числа, а $\chi(n)$ — число пар целых x, y, удовлетворяющие условию $(x,n)=(y,n)=(x+y,n)=1$, $x<n$, $y<n$. Найдите формулу для $\chi(n)$.

9 класс **Числовой разнобой** 12 января 2017

0. Можно ли разбить натуральные числа от 1 до 2017 на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равна произведению чисел в другой группе.

1. При каких натуральных n число $n^{10}+n^5+1$ является простым?

2. Докажите, что уравнение $x^2+y^2=z^n$, где n — натуральное, всегда имеет ненулевое целочисленное решение.

3. Найдите все пары натуральных чисел таких, что их сумма делит их произведение.

4. Докажите, что существует бесконечно много треугольных чисел, являющихся полными квадратами.

5. Пусть x, y, z, $n>2$ — натуральные числа, такие что $x^n+y^n=z^n$. Покажите, что если $p=2n+1$ — простое, то $2n+1$ делит хотя бы одно из чисел x, y, z.

6. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел не может быть ни квадратом, ни кубом целого числа.

7. Для любой пары натуральных (a,b) покажите, что существует бесконечно много пар натуральных (A,B) таких, что $\varphi(A)\equiv 0 \mod a$, $\varphi(B)\equiv 0 \mod b$, $\varphi(A+B+AB)\equiv 0 \mod ab$, где φ означает φ-функцию Эйлера.

8. Пусть a и b — взаимно простые числа. Докажите, что существуют натуральные m и n такие, что $a^m+b^n\equiv 1 \mod ab$.

9. Для каждого натурального $n>1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число d_n+d_{n+1} является точным квадратом.

10. Пусть x, y, n — натуральные числа, а $\chi(n)$ — число пар целых x, y, удовлетворяющие условию $(x,n)=(y,n)=(x+y,n)=1$, $x<n$, $y<n$. Найдите формулу для $\chi(n)$.