9 класс | Готовимся к регионалке | 9 января 2017

**1.** Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при $x^2$, одинаковыми коэффициентами при $x$, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через $x_i$. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

**2.** На столе лежат 7 карточек с цифрами от 0 до 6. Двое по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто впервые из своих карточек сможет составить число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?

**3.** Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

**4.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$ ($AB = AC$). На меньшей дуге $AB$ описанной около него окружности взята точка $D$. На продолжении отрезка $AD$ за точку $D$ выбрана точка $E$ так, что точки $A$ и $E$ лежат в одной полуплоскости относительно $BC$. Описанная окружность треугольника $BDE$ пересекает сторону $AB$ в точке $F$. Докажите, что прямые $EF$ и $BC$ параллельны.

**5.** Числа $a$ и $b$ таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

**6.** Через центры некоторых клеток шахматной доски $8 \times 8$ проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь черных частей равна общей площади белых частей?

**7.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Прямая, перпендикулярная стороне $AC$ и проходящая через точку $A_1$, пересекает прямую $B_1C_1$ в точке $D$. Докажите, что угол $ADC$ прямой.

**8.** Прямую палку длиной 2 метра распилили на $N$ палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем $N$ можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

9 класс | Готовимся к регионалке | 9 января 2017

**1.** Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при $x^2$, одинаковыми коэффициентами при $x$, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через $x_i$. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

**2.** На столе лежат 7 карточек с цифрами от 0 до 6. Двое по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто впервые из своих карточек сможет составить число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?

**3.** Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

**4.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$ ($AB = AC$). На меньшей дуге $AB$ описанной около него окружности взята точка $D$. На продолжении отрезка $AD$ за точку $D$ выбрана точка $E$ так, что точки $A$ и $E$ лежат в одной полуплоскости относительно $BC$. Описанная окружность треугольника $BDE$ пересекает сторону $AB$ в точке $F$. Докажите, что прямые $EF$ и $BC$ параллельны.

**5.** Числа $a$ и $b$ таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

**6.** Через центры некоторых клеток шахматной доски $8 \times 8$ проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь черных частей равна общей площади белых частей?

**7.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Прямая, перпендикулярная стороне $AC$ и проходящая через точку $A_1$, пересекает прямую $B_1C_1$ в точке $D$. Докажите, что угол $ADC$ прямой.

**8.** Прямую палку длиной 2 метра распилили на $N$ палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем $N$ можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?