

Определение. Гомотетией с центром в точке O и ненулевым коэффициентом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

0. Докажите, что при гомотетии

- а) прямая переходит в параллельную ей прямую;
- б) окружность переходит в окружность.

1. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата, образуют квадрат.

2. а) Найдите геометрическое место середин хорд, одним из концов которых является данная точка окружности A .

б) В окружности ω проведена хорда AB . Найдите геометрической место точек пересечения медиан треугольников ABC , где $C \in \omega$.

3. **Лемма Архимеда.** В окружности Ω проведена хорда AB . Окружность ω касается хорды AB и данной дуги AB . Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания, проходит через середину оставшейся дуги AB .

4. а) Докажите, что неравные треугольники с попарно параллельными сторонами гомотетичны.

б) Докажите, что точка пересечения высот H , точка пересечения медиан M и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой, причем $HM = 2MO$.

в) В треугольнике ABC точки I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно, A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые I_aA_1, I_bB_1, I_cC_1 пересекаются в одной точке.

г) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

Определение. Гомотетией с центром в точке O и ненулевым коэффициентом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

0. Докажите, что при гомотетии

- а) прямая переходит в параллельную ей прямую;
- б) окружность переходит в окружность.

1. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата, образуют квадрат.

2. а) Найдите геометрическое место середин хорд, одним из концов которых является данная точка окружности A .

б) В окружности ω проведена хорда AB . Найдите геометрической место точек пересечения медиан треугольников ABC , где $C \in \omega$.

3. **Лемма Архимеда.** В окружности Ω проведена хорда AB . Окружность ω касается хорды AB и данной дуги AB . Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания, проходит через середину оставшейся дуги AB .

4. а) Докажите, что неравные треугольники с попарно параллельными сторонами гомотетичны.

б) Докажите, что точка пересечения высот H , точка пересечения медиан M и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой, причем $HM = 2MO$.

в) В треугольнике ABC точки I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно, A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые I_aA_1, I_bB_1, I_cC_1 пересекаются в одной точке.

г) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .