9 класс — **Метод Штурма** — 1 декабря 2016

-1. Даны два положительных числа $a < b$. Рассмотрим числа $a' = a+\varepsilon$, $b' = b-\varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leqslant \frac{a+b}{2}$ (то есть сблизим числа a и b, не меняя их сумму). Что больше: ab или $a'b'$?

0. Пусть сумма положительных a и b фиксированна. Как при сближении ведёт себя величина
a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; **b)** $a^2 + b^2$ **c)** $a^3 + b^3$; **d)** $a^n + b^n$; **e)** $\sqrt{a} + \sqrt{b}$;
f) Тот же самый вопрос, если фиксировано произведение чисел.

1. Для нечётного n докажите, что $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

2. Пусть $x_1+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \leqslant 2^n$.

3. Пусть $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что
a) $x_1 + \ldots + x_n \geqslant n$.
b) $(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geqslant 2^n$.

4. С помощью метода Штурма докажите неравенство средних: для любых неотрицательных $x_1, x_2 \ldots, x_n$ выполнено

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

5. Пусть неотрицательные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\frac{(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)} \geqslant \frac{1}{3}$$

6. Неотрицательные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что

$$(1 + x_1)(2 + x_2)\ldots(n + x_n) \leqslant 2^n \cdot n!$$

9 класс — **Метод Штурма** — 1 декабря 2016

-1. Даны два положительных числа $a < b$. Рассмотрим числа $a' = a+\varepsilon$, $b' = b-\varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leqslant \frac{a+b}{2}$ (то есть сблизим числа a и b, не меняя их сумму). Что больше: ab или $a'b'$?

0. Пусть сумма положительных a и b фиксированна. Как при сближении ведёт себя величина
a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; **b)** $a^2 + b^2$ **c)** $a^3 + b^3$; **d)** $a^n + b^n$; **e)** $\sqrt{a} + \sqrt{b}$;
f) Тот же самый вопрос, если фиксировано произведение чисел.

1. Для нечётного n докажите, что $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

2. Пусть $x_1+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \leqslant 2^n$.

3. Пусть $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что
a) $x_1 + \ldots + x_n \geqslant n$.
b) $(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geqslant 2^n$.

4. С помощью метода Штурма докажите неравенство средних: для любых неотрицательных $x_1, x_2 \ldots, x_n$ выполнено

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

5. Пусть неотрицательные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\frac{(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)} \geqslant \frac{1}{3}$$

6. Неотрицательные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что

$$(1 + x_1)(2 + x_2)\ldots(n + x_n) \leqslant 2^n \cdot n!$$