9 класс **Деление многочленов** 24 ноября 2016

1. Найдите остаток от деления $x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x+1$ на x^2-1.

2. Вычислите $f(\sqrt[3]{2}-1)$, где

$$f(x)=x^{2017}+3x^{2016}+4x^{2015}+2x^{2014}+4x^{2013}+2x^{2012}+4x^{2011}+2x^{2010}+\ldots+$$
$$+4x^5+2x^4+4x^3+2x^2+3x+1.$$

3. При каких a и b многочлен x^4+1 делится на x^2+ax+b?

4. Докажите, что из равенства $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$ следует соотношение НОД$(A(x),B(x))=$ НОД$(A(x),R(x))$.

5. Найдите наибольший общий делитель многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если
a) $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $Q(x)=x^3+x^2-x-1$;
b) $P(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$, $Q(x)=3x^3-2x^2+x-1$;
c) $P(x)=x^{2016}-1$, $Q(x)=x^{962}-1$.

6. Кубическое и квадратное уравнения с рациональными коэффициентами имеют общее решение. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональный корень.

7. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что $P(k)$ делится на $Q(k)$ при любом целом k. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

8. Многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2(x)+Q^2(x)=R^2(x)$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.

9. Известно, что $a^5-a^3+a=2$. Докажите, что $a>\sqrt[6]{3}$.

9 класс **Деление многочленов** 24 ноября 2016

1. Найдите остаток от деления $x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x+1$ на x^2-1.

2. Вычислите $f(\sqrt[3]{2}-1)$, где

$$f(x)=x^{2017}+3x^{2016}+4x^{2015}+2x^{2014}+4x^{2013}+2x^{2012}+4x^{2011}+2x^{2010}+\ldots+$$
$$+4x^5+2x^4+4x^3+2x^2+3x+1.$$

3. При каких a и b многочлен x^4+1 делится на x^2+ax+b?

4. Докажите, что из равенства $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$ следует соотношение НОД$(A(x),B(x))=$ НОД$(A(x),R(x))$.

5. Найдите наибольший общий делитель многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если
a) $P(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $Q(x)=x^3+x^2-x-1$;
b) $P(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$, $Q(x)=3x^3-2x^2+x-1$;
c) $P(x)=x^{2016}-1$, $Q(x)=x^{962}-1$.

6. Кубическое и квадратное уравнения с рациональными коэффициентами имеют общее решение. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональный корень.

7. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что $P(k)$ делится на $Q(k)$ при любом целом k. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

8. Многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2(x)+Q^2(x)=R^2(x)$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.

9. Известно, что $a^5-a^3+a=2$. Докажите, что $a>\sqrt[6]{3}$.