

1. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в действительности попарные расстояния не изменились.

2. На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить следующую операцию: вставка двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю слева?

3. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые две кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного числа камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню?

4. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом вокруг одной из его ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких операций поменять ножки циркуля местами.

5. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после $n - 1$ такой операции?

6. Фишка ходит по квадратной доске, каждым своим ходом сдвигаясь либо на клетку вверх, либо на клетку вправо, либо по диагонали вниз-влево. Может ли она обойти всю доску, побывав на всех полях по одному разу, и закончить на поле, соседнем справа от исходного?

7. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета ее соседей, а так же убрать красную точку и изменить цвета ее бывших соседей. Пусть первоначально было две красные точки. Доказать, что за несколько разрешенных операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.

1. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в действительности попарные расстояния не изменились.

2. На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить следующую операцию: вставка двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю слева?

3. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые две кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного числа камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню?

4. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом вокруг одной из его ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких операций поменять ножки циркуля местами.

5. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после $n - 1$ такой операции?

6. Фишка ходит по квадратной доске, каждым своим ходом сдвигаясь либо на клетку вверх, либо на клетку вправо, либо по диагонали вниз-влево. Может ли она обойти всю доску, побывав на всех полях по одному разу, и закончить на поле, соседнем справа от исходного?

7. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета ее соседей, а так же убрать красную точку и изменить цвета ее бывших соседей. Пусть первоначально было две красные точки. Доказать, что за несколько разрешенных операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.