

**-2. а)** Пусть  $c$  — положительное число. Сколько существует на прямой  $AB$  точек  $X$  таких, что  $AX^2 - BX^2 = c$ ?

**б)** Найдите ГМТ  $X$  на плоскости таких, что  $AX^2 - BX^2 = c$ .

**с)** Вспомнив формулу для степени точки ( $d^2 - r^2$ ), докажите, что геометрическим местом точек, имеющих одинаковую степень относительно двух неконцентрических окружностей, является прямая, перпендикулярная их линии центров. Что будет, если окружности концентрические?

*Эта прямая называется радикальной осью двух окружностей.*

**-1.** Даны две пересекающиеся окружности. Докажите, что их радикальная ось — это прямая, проходящая через точки пересечения.

**0.** Докажите, что радикальные оси трёх окружности, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Что будет, если центры окружностей лежат на одной прямой?

*Точка пересечения называется радикальным центром трёх окружностей.*

**1.** Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум окружностям лежат на одной прямой.

**2. а)** Докажите, что радикальная ось двух вневписанных окружностей треугольника проходит через середину стороны треугольника и параллельна биссектрисе угла, противоположного этой стороне.

**б)** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$ . На продолжениях сторон  $AB$  и  $AC$  за точки  $B$  и  $C$  выбраны точки  $X$  и  $Y$  так, что  $C_1X = B_1Y = BC$ . Докажите, что середины отрезков  $C_1X$ ,  $BC$  и  $B_1Y$  лежат на одной прямой.

**3.** Дан шестиугольник  $ABCDEF$  такой, что  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = AF$ , а углы  $A$  и  $C$  прямые. Докажите, что  $BE \perp DF$ .

**4.** На сторонах  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Оказалось, что четырёхугольники  $A_1A_2B_2B_1$ ,  $A_1A_2C_2C_1$  и  $B_1B_2C_1C_2$  вписанные. Верно ли, что все шесть точек лежат на одной окружности?

**5.** На гипотенузе  $AB$  прямоугольного равнобедренного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $M$ . Докажите, что общая хорда окружностей с центром  $C$  и радиусом  $CA$  и с центром  $M$  и радиусом  $MC$  проходит через середину  $AB$ .

**6.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $H$ . Прямая  $B_1C_1$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $PH$  перпендикулярна медиане, проведённой из вершины  $A$ .

**-2. а)** Пусть  $c$  — положительное число. Сколько существует на прямой  $AB$  точек  $X$  таких, что  $AX^2 - BX^2 = c$ ?

**б)** Найдите ГМТ  $X$  на плоскости таких, что  $AX^2 - BX^2 = c$ .

**с)** Вспомнив формулу для степени точки ( $d^2 - r^2$ ), докажите, что геометрическим местом точек, имеющих одинаковую степень относительно двух неконцентрических окружностей, является прямая, перпендикулярная их линии центров. Что будет, если окружности концентрические?

*Эта прямая называется радикальной осью двух окружностей.*

**-1.** Даны две пересекающиеся окружности. Докажите, что их радикальная ось — это прямая, проходящая через точки пересечения.

**0.** Докажите, что радикальные оси трёх окружности, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Что будет, если центры окружностей лежат на одной прямой?

*Точка пересечения называется радикальным центром трёх окружностей.*

**1.** Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум окружностям лежат на одной прямой.

**2. а)** Докажите, что радикальная ось двух вневписанных окружностей треугольника проходит через середину стороны треугольника и параллельна биссектрисе угла, противоположного этой стороне.

**б)** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$ . На продолжениях сторон  $AB$  и  $AC$  за точки  $B$  и  $C$  выбраны точки  $X$  и  $Y$  так, что  $C_1X = B_1Y = BC$ . Докажите, что середины отрезков  $C_1X$ ,  $BC$  и  $B_1Y$  лежат на одной прямой.

**3.** Дан шестиугольник  $ABCDEF$  такой, что  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = AF$ , а углы  $A$  и  $C$  прямые. Докажите, что  $BE \perp DF$ .

**4.** На сторонах  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Оказалось, что четырёхугольники  $A_1A_2B_2B_1$ ,  $A_1A_2C_2C_1$  и  $B_1B_2C_1C_2$  вписанные. Верно ли, что все шесть точек лежат на одной окружности?

**5.** На гипотенузе  $AB$  прямоугольного равнобедренного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $M$ . Докажите, что общая хорда окружностей с центром  $C$  и радиусом  $CA$  и с центром  $M$  и радиусом  $MC$  проходит через середину  $AB$ .

**6.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $H$ . Прямая  $B_1C_1$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $PH$  перпендикулярна медиане, проведённой из вершины  $A$ .