9 класс **Степень точки** 7 ноября 2016

Определение. На плоскости даны окружность ω и точка P. Прямая, проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B. *Степенью точки* P назовем произведение $PA \cdot PB$, взятое со знаком плюс, если точка P лежит вне окружности, и со знаком минус — если внутри.

0. a) Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора секующей.

b) Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности, ее степень точки равна квадрату касательной, проведенной из этой точки.

c) Пусть расстояние от точки P до центра окружности равно d, радиус окружности равен R. Докажите, что степень точки P равна $d^2 - R^2$.

d) На сторонах угла с вершиной в точке P выбраны точки A, B, C, D (A и B — на одной стороне угла, C и D — на другой). Оказалось, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

---

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На прямой AB выбрана произвольная точка P. Докажите, что касательные, проведенные из точки P к ω_1 и ω_2 равны.

2. В треугольнике ABC проведены окружности ω_b и ω_c, которые касаются прямой BC в точках B и C соответственно, а также проходят через точку A. Докажите, что их вторая точка пересечения лежит на медиане, проведенной из угла A.

3. В угол вписаны две окружности. Первая касается сторон угла в точках A и B, вторая — в точках C и D. Докажите, что окружности высекают на прямой AD две равные хорды.

4. Окружность делит каждую из сторон треугольника на 3 равные части. Докажите, что он правильный.

5. На прямых, содержащих высоты BB_1 и CC_1 отметили точки, из которых соответствующие стороны (то есть AC и AB соответственно) видны под прямыми углами. Докажите, что четыре отмеченные точки лежат на одной окружности.

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точка M на прямой BC такова, что $MI \perp AI$. Точка D — основание перпендикуляра из I на AM. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

7. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Точка O — центр поисанной окружности. Докажите, что O, H, A_1 и точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежат на одной окружности.

9 класс **Степень точки** 7 ноября 2016

Определение. На плоскости даны окружность ω и точка P. Прямая, проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B. *Степенью точки* P назовем произведение $PA \cdot PB$, взятое со знаком плюс, если точка P лежит вне окружности, и со знаком минус — если внутри.

0. a) Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора секующей.

b) Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности, ее степень точки равна квадрату касательной, проведенной из этой точки.

c) Пусть расстояние от точки P до центра окружности равно d, радиус окружности равен R. Докажите, что степень точки P равна $d^2 - R^2$.

d) На сторонах угла с вершиной в точке P выбраны точки A, B, C, D (A и B — на одной стороне угла, C и D — на другой). Оказалось, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

---

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На прямой AB выбрана произвольная точка P. Докажите, что касательные, проведенные из точки P к ω_1 и ω_2 равны.

2. В треугольнике ABC проведены окружности ω_b и ω_c, которые касаются прямой BC в точках B и C соответственно, а также проходят через точку A. Докажите, что их вторая точка пересечения лежит на медиане, проведенной из угла A.

3. В угол вписаны две окружности. Первая касается сторон угла в точках A и B, вторая — в точках C и D. Докажите, что окружности высекают на прямой AD две равные хорды.

4. Окружность делит каждую из сторон треугольника на 3 равные части. Докажите, что он правильный.

5. На прямых, содержащих высоты BB_1 и CC_1 отметили точки, из которых соответствующие стороны (то есть AC и AB соответственно) видны под прямыми углами. Докажите, что четыре отмеченные точки лежат на одной окружности.

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точка M на прямой BC такова, что $MI \perp AI$. Точка D — основание перпендикуляра из I на AM. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

7. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Точка O — центр поисанной окружности. Докажите, что O, H, A_1 и точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежат на одной окружности.