9 класс | Дорешивание | 3 ноября 2016

Ниже представлены задачи, на которые мы рекомендуем обратить внимание.

1. (*Вписанные углы 2, 6*) H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, M — проекция ортоцентра на медиану, проведенную из вершины A. Докажите, что четырёхугольник $BHMC$ вписанный.

2. (*Индукция в графах, 8*) В городе Никитовка двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Никитовке можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города удастся проехать в любую другую.

3. (*Многочлены, 5*) Дан квадратный трехчлен $2015x^2+2016x+2017$. Двое ходят по очереди. Своим ходом игрок может вычесть из многочлена x^2, x или 1. Проигрывает игрок, после хода которого получается многочлен с целочисленным корнем. Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

4. (*Многочлены, 6*) Существуют ли такие четыре квадратных трехчлена, что, в каком бы порядке f_1, f_2, f_3, f_4 их ни выписали, найдется такое вещественное число a, что $f_1(a)<f_2(a)<f_3(a)<f_4(a)$?

5. (*Многочлены, 7*) Докажите, что при любых натуральных k, l, m многочлен $x^{3k+2}+x^{3l+1}+x^{3m}$ делится на x^2+x+1.

6. (*Многочлены, 8*) Даны приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2016. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

7. (*Геометрический разнобой, 6*) Три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку. Докажите, что их общая точка пересечения является ортоцентром треугольника, с вершинами во вторых точках пересечения окружностей.

8. (*Колма, 3*) В остроугольном треугольнике ABC ($AC>AB$) проведена биссектриса AD. Прямая, проходящая через B перпендикулярно AD, вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Докажите, что прямая EA проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC.

9 класс | Дорешивание | 3 ноября 2016

Ниже представлены задачи, на которые мы рекомендуем обратить внимание.

1. (*Вписанные углы 2, 6*) H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, M — проекция ортоцентра на медиану, проведенную из вершины A. Докажите, что четырёхугольник $BHMC$ вписанный.

2. (*Индукция в графах, 8*) В городе Никитовка двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Никитовке можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города удастся проехать в любую другую.

3. (*Многочлены, 5*) Дан квадратный трехчлен $2015x^2+2016x+2017$. Двое ходят по очереди. Своим ходом игрок может вычесть из многочлена x^2, x или 1. Проигрывает игрок, после хода которого получается многочлен с целочисленным корнем. Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

4. (*Многочлены, 6*) Существуют ли такие четыре квадратных трехчлена, что, в каком бы порядке f_1, f_2, f_3, f_4 их ни выписали, найдется такое вещественное число a, что $f_1(a)<f_2(a)<f_3(a)<f_4(a)$?

5. (*Многочлены, 7*) Докажите, что при любых натуральных k, l, m многочлен $x^{3k+2}+x^{3l+1}+x^{3m}$ делится на x^2+x+1.

6. (*Многочлены, 8*) Даны приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2016. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

7. (*Геометрический разнобой, 6*) Три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку. Докажите, что их общая точка пересечения является ортоцентром треугольника, с вершинами во вторых точках пересечения окружностей.

8. (*Колма, 3*) В остроугольном треугольнике ABC ($AC>AB$) проведена биссектриса AD. Прямая, проходящая через B перпендикулярно AD, вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Докажите, что прямая EA проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC.