9 класс — **По мотивам Колма** — 31 октября 2016

1. Произведение пяти чисел отрицательно, а сумма любых трёх из них — положительна. Сколько положительных среди этих пяти чисел?

2. На окружности отмечены четыре дуги: в 200°, 300°, 310° и 320°. Докажите, что на окружности есть точка, принадлежащая ровно трём отмеченным дугам.

3. В остроугольном треугольнике ABC ($AC > AB$) проведена биссектриса AD. Прямая, проходящая через B перпендикулярно AD, вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Докажите, что прямая EA проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC.

4. Решите уравнение в простых числах: $p + p^2 + p^3 + p^4 = q!$.

5. У двух магов есть $2n + 1$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n \geq 10$ – натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n+1$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

6. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab \geqslant 3$. Докажите неравенство
$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+2} \geqslant 1.$$

7. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N. В треугольниках ABM, MCN и AND провели медианы из вершин B, C и D соответственно. Докажите, что все три медианы пересекаются в одной точке.

8. Города некоторой страны соединены дорогами (каждая дорога соединяет ровно два города) так, что из любого города в любой можно проехать единственным образом. Некоторые из городов этой страны являются стратегическими, и каждый город, лежащий на пути между двумя стратегическими городами, поддерживает радиосвязь с каким-нибудь из них (или с обоими). Докажите, что найдутся два соседних города, в объединении поддерживающие радиосвязь со всеми стратегическими городами (считается, что стратегический город поддерживает связь сам с собой).

9 класс — **По мотивам Колма** — 31 октября 2016

1. Произведение пяти чисел отрицательно, а сумма любых трёх из них — положительна. Сколько положительных среди этих пяти чисел?

2. На окружности отмечены четыре дуги: в 200°, 300°, 310° и 320°. Докажите, что на окружности есть точка, принадлежащая ровно трём отмеченным дугам.

3. В остроугольном треугольнике ABC ($AC > AB$) проведена биссектриса AD. Прямая, проходящая через B перпендикулярно AD, вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Докажите, что прямая EA проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC.

4. Решите уравнение в простых числах: $p + p^2 + p^3 + p^4 = q!$.

5. У двух магов есть $2n + 1$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n \geq 10$ – натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n+1$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

6. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab \geqslant 3$. Докажите неравенство
$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+2} \geqslant 1.$$

7. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N. В треугольниках ABM, MCN и AND провели медианы из вершин B, C и D соответственно. Докажите, что все три медианы пересекаются в одной точке.

8. Города некоторой страны соединены дорогами (каждая дорога соединяет ровно два города) так, что из любого города в любой можно проехать единственным образом. Некоторые из городов этой страны являются стратегическими, и каждый город, лежащий на пути между двумя стратегическими городами, поддерживает радиосвязь с каким-нибудь из них (или с обоими). Докажите, что найдутся два соседних города, в объединении поддерживающие радиосвязь со всеми стратегическими городами (считается, что стратегический город поддерживает связь сам с собой).