9 класс | Геометрический разнобой | 27 октября 2016

1. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ точки H, I, O являются ортоцентром, центром вписанной окружности и центром описанной окружности соответственно. Докажите, что точки B, H, I, O, C лежат на одной окружности.

2. Для остроугольного треугольника ABC и произвольной точки X внутри него обозначим через A_X, B_X, C_X точки пересечения прямых AX, BX, CX со сторонами BC, AC, AB соответственно. Сколько точек внутри треугольника ABC могут обладать тем свойством, что $\angle AA_XC = \angle BB_XA = \angle CC_XB$?

3. В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что проекции точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

4. a) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности ω_1 и ω_2, которые касаются стороны AD в точках X и Y соответственно. Выразите длину отрезка XY через длины отрезков AB, AC, BD и CD. (*Возможно, не помешает вспомнить, как выражаются через стороны треугольника длины отрезков, на которые точки касания с вписанной окружностью делят стороны треугольника.*)

b) Пусть A_1 — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной BC. Докажите, что ω_1 и ω_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и A_1 совпадают.

c) Сформулируйте и докажите утверждение аналогичное пункту **b)** для вневписанных окружностей треугольников ABD и ACD.

d) Докажите, что центры ω_1 и ω_2, точки A_1 и D лежат на одной окружности.

5. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки K и L, делящие BC на 3 равных отрезка. Докажите, что $AK + AL < AB + AC$.

6. Три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку. Докажите, что их общая точка пересечения является ортоцентром треугольника, с вершинами во вторых точках пересечения окружностей.

7. На меньшей дуге AB описанной окружности равностороннего треугольника ABC выбрана точка X. Докажите, что $CX = AX + BX$.

9 класс | Геометрический разнобой | 27 октября 2016

1. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ точки H, I, O являются ортоцентром, центром вписанной окружности и центром описанной окружности соответственно. Докажите, что точки B, H, I, O, C лежат на одной окружности.

2. Для остроугольного треугольника ABC и произвольной точки X внутри него обозначим через A_X, B_X, C_X точки пересечения прямых AX, BX, CX со сторонами BC, AC, AB соответственно. Сколько точек внутри треугольника ABC могут обладать тем свойством, что $\angle AA_XC = \angle BB_XA = \angle CC_XB$?

3. В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что проекции точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

4. a) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности ω_1 и ω_2, которые касаются стороны AD в точках X и Y соответственно. Выразите длину отрезка XY через длины отрезков AB, AC, BD и CD. (*Возможно, не помешает вспомнить, как выражаются через стороны треугольника длины отрезков, на которые точки касания с вписанной окружностью делят стороны треугольника.*)

b) Пусть A_1 — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной BC. Докажите, что ω_1 и ω_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и A_1 совпадают.

c) Сформулируйте и докажите утверждение аналогичное пункту **b)** для вневписанных окружностей треугольников ABD и ACD.

d) Докажите, что центры ω_1 и ω_2, точки A_1 и D лежат на одной окружности.

5. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки K и L, делящие BC на 3 равных отрезка. Докажите, что $AK + AL < AB + AC$.

6. Три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку. Докажите, что их общая точка пересечения является ортоцентром треугольника, с вершинами во вторых точках пересечения окружностей.

7. На меньшей дуге AB описанной окружности равностороннего треугольника ABC выбрана точка X. Докажите, что $CX = AX + BX$.