9 класс	Геометрический разнобой	27 октября 2016

1. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ точки H, I, O являются ортоцентром, центром вписанной окружности и центром описанной окружности соответственно. Докажите, что точки B, H, I, O, C лежат на одной окружности.

Решение. Если $\angle A = \alpha$, то

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \quad \angle BHC = 180^\circ - \alpha, \quad \angle BOC = 2\alpha.$$

Если $\alpha = 60^\circ$, то все указанные углы равны.

2. Для остроугольного треугольника ABC и произвольной точки X внутри него обозначим через A_X, B_X, C_X точки пересечения прямых AX, BX, CX со сторонами BC, AC, AB соответственно. Сколько точек внутри треугольника ABC могут обладать тем свойством, что $\angle AA_XC = \angle BB_XA = \angle CC_XB$?

Решение. Обозначим через A_1, B_1, C_1 основания высот из соответствующих вершин. Заметим, что точка H подходит. Предположим, что подходит еще одна точка. Без ограничения общности, она лежит в треугольнике A_1HB. Тогда уголы AA_XC и BB_XA острые, а угол CC_XB тупой. Противоречие.

4. a) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности ω_1 и ω_2, которые касаются стороны AD в точках X и Y соответственно. Выразите длину отрезка XY через длины отрезков AB, AC, BD и CD. (*Возможно, не помешает вспомнить, как выражаются через стороны треугольника длины отрезков, на которые точки касания с вписанной окружностью делят стороны треугольника.*)

b) Пусть A_1 — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной BC. Докажите, что ω_1 и ω_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и A_1 совпадают.

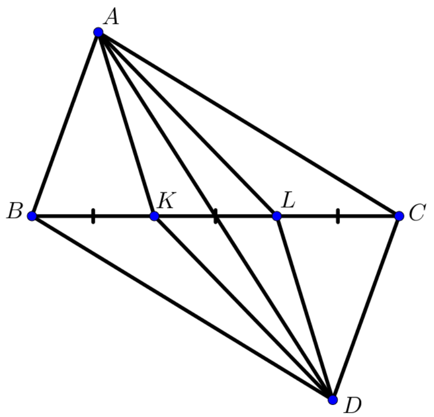
c) Сформулируйте и докажите утверждение аналогичное пункту **b)** для вневписанных окружностей треугольников ABD и ACD.

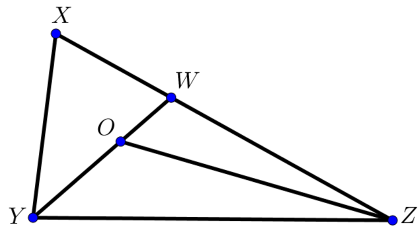
d) Докажите, что центры ω_1 и ω_2, точки A_1 и D лежат на одной окружности.

Указание. Решение этой задачи, а также многие другие факты вы можете найти в статье А.Блинкова и Ю.Блинкова.

5. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки K и L, делящие BC на 3 равных отрезка. Докажите, что $AK + AL < AB + AC$.

Решение. Пусть $ABDC$ — параллелограмм. Тогда $AK = DL$, так как $AKDL$ — также параллелограмм.





Докажем вспомогательную лемму, из которой будет следовать утверждение задачи: если внутри треугольника XYZ выбрана точка O, то $XY + XZ > YO + OZ$. Действительно, продлим YO до пересечения со стороной XZ в точке W. Тогда

$$YO + OZ < YO + OW + WZ = YW + WZ < YX + XW + WZ = XY + XZ.$$

7. На меньшей дуге AB описанной окружности равностороннего треугольника ABC выбрана точка X. Докажите, что $CX = AX + BX$.

Решение. Рассмотрим точку Y такую, что треугольник XYB правильный. Тогда $\angle YCB = \angle XAB$, как опирающиеся на одну дугу. $\angle ABX = \angle CBY$, поскольку $\angle YBX = \angle CBA = 60°$. Тогда треугольники ABX и CBY равны, откуда $AX = CY$ и $\angle CYB = \angle AXB = 120°$, откуда точки X, Y, C лежат на одной прямой, причём $CX = AX + BX$.