9 класс — **Многочлены** — 24 октября 2016

1. В выражении $(x^4-2x^3+3x^2-4x+5)^{2016}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найдите сумму коэффициентов получившегося многочлена.

2. a и b — положительные числа. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+8x+b$ и минимального значения квадратного трехчлена $g(x)=bx^2+8x+a$ равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

3. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают неположительные значения на непересекающихся отрезках. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha f(x)+\beta g(x)>0$.

4. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точек принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

5. Дан квадратный трехчлен $2015x^2+2016x+2017$. Двое ходят по очереди. Своим ходом игрок может вычесть из многочлена x^2, x или 1. Проигрывает игрок, после хода которого получается многочлен с целочисленным корнем. Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

6. Существуют ли такие четыре квадратных трехчлена, что, в каком бы порядке f_1, f_2, f_3, f_4 их ни выписали, найдется такое вещественное число a, что $f_1(a)<f_2(a)<f_3(a)<f_4(a)$?

7. Докажите, что при любых натуральных k, l, m многочлен $x^{3k+2}+x^{3l+1}+x^{3m}$ делится на x^2+x+1.

8. Даны приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2016. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

9. Пусть $P(x)$ — многочлен нечетной степени, имеющий 2017 различных корней. Докажите, что уравнение $P(P(x))=0$ также имеет хотя бы 2017 различных корней.

9 класс — **Многочлены** — 24 октября 2016

1. В выражении $(x^4-2x^3+3x^2-4x+5)^{2016}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найдите сумму коэффициентов получившегося многочлена.

2. a и b — положительные числа. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+8x+b$ и минимального значения квадратного трехчлена $g(x)=bx^2+8x+a$ равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

3. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают неположительные значения на непересекающихся отрезках. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha f(x)+\beta g(x)>0$.

4. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точек принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

5. Дан квадратный трехчлен $2015x^2+2016x+2017$. Двое ходят по очереди. Своим ходом игрок может вычесть из многочлена x^2, x или 1. Проигрывает игрок, после хода которого получается многочлен с целочисленным корнем. Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

6. Существуют ли такие четыре квадратных трехчлена, что, в каком бы порядке f_1, f_2, f_3, f_4 их ни выписали, найдется такое вещественное число a, что $f_1(a)<f_2(a)<f_3(a)<f_4(a)$?

7. Докажите, что при любых натуральных k, l, m многочлен $x^{3k+2}+x^{3l+1}+x^{3m}$ делится на x^2+x+1.

8. Даны приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2016. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

9. Пусть $P(x)$ — многочлен нечетной степени, имеющий 2017 различных корней. Докажите, что уравнение $P(P(x))=0$ также имеет хотя бы 2017 различных корней.