9 класс	Многочлены	24 октября 2016

1. В выражении $(x^4-2x^3+3x^2-4x+5)^{2016}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найдите сумму коэффициентов получившегося многочлена.

Решение. Заметим, что если есть многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$, то $P(1)=a_n\cdot 1^n+a_{n-1}\cdot 1^{n-1}+\ldots+a_0=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0$. То есть сумма коэффициентов многочлена равна значению многочлена при $x=1$. Поэтому у исходного многочлена сумма коэффициентов равна 3^{2016}.

4. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точек принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

Решение. Сдвинем наш квадратный трёхчлен параллельно оси Oy так, чтобы вершина параболы попала на ось Ox, то есть его уравнение стало иметь вид $f(x)=x^2+c$. Заметим, что если $f(x)$ принимает простое значение в точке a, то он принимает такое же значение в точке $-a$. Поэтому если точки из условия — это не -1, 0, 1, то утверждение задачи очевидно. Рассмотрим теперь случай, когда значения в точках -1, 0, 1 простые. В этом случае числа c и $c+1$ должны являться простыми, но такое возможно только если $c=2$. Но в этом случае $f(3)=11$ — простое число.

5. Дан квадратный трехчлен $2015x^2+2016x+2017$. Двое ходят по очереди. Своим ходом игрок может вычесть из многочлена x^2, x или 1. Проигрывает игрок, после хода которого получается многочлен с целочисленным корнем. Может ли один из игроков обеспечить себе победу?

Решение. Обозначим квадратный трёхчлен за $f(x)$. Заметим, что $f(1)$ после каждого хода уменьшается на 1, поэтому не позже, чем через 6048 ходов игра закончится. Покажем, что первый игрок может не проиграть, из этого будет следовать, что он выиграет (так как 6048-ой ход сделает второй игрок). Пусть первый игрок будет делать так, чтобы после его хода все коэффициенты были нечётны (очевидно, это возможно). Тогда у получающегося уравнения не может быть нечётного корня, поскольку сумма трёх нечётных чисел не может быть равна 0. Но и чётного корня у него не может быть, поскольку сумма двух чётных чисел и нечётного числа также нечётна.

6. Существуют ли такие четыре квадратных трехчлена, что, в каком бы порядке f_1, f_2, f_3, f_4 их ни выписали, найдется такое вещественное число a, что $f_1(a)<f_2(a)<f_3(a)<f_4(a)$?

Решение. У двух квадратных трёхчленов не более двух точек пересечения. Отсюда следует, что у четырёх квадратных трёхчленов точек пересечения не более 12.

Предположим, что такие квадратные трёхчлены существуют: пусть это g_1, g_2, g_3, g_4. Для каждой точки $a \in \mathbb{R}$ (не являющейся точкой пересечения квадратных трёхчленов) рассмотрим последовательность 4 чисел: номера квадратных трёхчленов в порядке возрастания значения трёхчленов в точке a (то есть если $g_1(a) < g_4(a) < g_2(a) < g_3(a)$, то последовательность будет 1, 4, 2, 3). По условию для любой последовательности найдётся точка, которой эта последовательность приписана. Заметим, что если между точками a, $b \in \mathbb{R}$ нет точки пересечения квадратных трёхчленов, то последовательности, приписанные этим точкам, совпадают. Всего точек пересечения не более 12, значит будет не более 13 различных последовательностей. А всего возможных последовательностей 24, противоречие.

7. Докажите, что при любых натуральных k, l, m многочлен $x^{3k+2} + x^{3l+1} + x^{3m}$ делится на $x^2 + x + 1$.

Решение. Пусть $k > 0$. Заметим, что многочлен вида $x^{3k+2} - x^2$ делится на $x^3 - 1$, а следовательно, и на $x^2 + x + 1$. Действительно,

$$x^{3k+2} - x^2 = x^2(x^{3k} - 1) = x^2(x^3 - 1)(\ldots).$$

Поэтому исходный многочлен делится на $x^2 + x + 1$ тогда и только тогда, когда на x^2+x+1 делится многочлен $x^2+x^{3l+1}+x^{3m}$. Рассуждая аналогично для l и m, получим, что исходный многочлен делится на $x^2 + x + 1$ тогда и только тогда, когда на $x^2 + x + 1$ делится многочлен $x^2 + x + 1$. Указанная делимость очевидна, поэтому исходный многочлен также делится на $x^2 + x + 1$.

8. Даны приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2016. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x + 1) = Q(x - 1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

Решение. Как известно, многочлен нечётной степени имеет хотя бы один корень. Отсюда следует, что у многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны коэффициенты при x^{2015}. В противном случае многочлен $P(x) - Q(x)$ имел бы 2015 степень, поэтому имел бы корень, что противоречит условию. Пусть $P(x) = x^{2016} + ax^{2015} + \ldots$. Тогда рассмотрим второе уравнение. Оно имеет вид

$$(x + 1)^{2016} + a(x + 1)^{2015} + \ldots = (x - 1)^{2016} + a(x - 1)^{2015} + \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2016x^{2015} + \ldots = 0,$$

где вместо троеточия написаны какие-то многочлены не более чем 2014 степени. Получаем, что второе уравнение имеет нечётную степень, откуда у него есть хотя бы один корень.