

1. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$.

2. В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что стартуя из некоторого города, можно проехать по всем городам, побывав в каждом по одному разу.

3. Усадьбы любых двух графов в Истринском районе соединены либо водным, либо сухопутным сообщением. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы любой граф мог по-прежнему добраться до любого другого.

4. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой не более чем с одной пересадкой.

5. В компании из n человек среди любых четверых есть знакомый с остальными тремя. Докажите, что есть человек, который знает всех остальных.

6. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалиниями.

7. Постройте связный граф на $6n$ вершинах, все степени всех вершин которого равны 3 так, чтобы в нем не было полных подграфов на 3 вершинах.

8. В городе Никитовка двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Никитовке можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города удастся проехать в любую другую.

1. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$.

2. В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что стартуя из некоторого города, можно проехать по всем городам, побывав в каждом по одному разу.

3. Усадьбы любых двух графов в Истринском районе соединены либо водным, либо сухопутным сообщением. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы любой граф мог по-прежнему добраться до любого другого.

4. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой не более чем с одной пересадкой.

5. В компании из n человек среди любых четверых есть знакомый с остальными тремя. Докажите, что есть человек, который знает всех остальных.

6. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалиниями.

7. Постройте связный граф на $6n$ вершинах, все степени всех вершин которого равны 3 так, чтобы в нем не было полных подграфов на 3 вершинах.

8. В городе Никитовка двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Никитовке можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города удастся проехать в любую другую.