9 класс	Графы + индукция	20 октября 2016

Важное замечание. *Предположим, мы решаем задачу про графы индукцией по числу вершин. Плохо говорить "Возьмём граф на n вершинах и добавим ещё одну вершину". Причина здесь в следующем. Рассмотрим множества A_n и A_{n+1} графов на n и $n+1$ вершине соответственно. Добавляя вершину (и какие-то рёбра) мы строим по графу из A_n граф из A_{n+1}. Но мы необязательно сможем получить всевозможные графы из A_{n+1}. Правильно говорить "Возьмём граф на $n+1$ вершине, удовлетворяющий условию, и выкинем из него одну вершину, со всеми идущими из неё рёбрами. К оставшемуся графу применим предположение индукции".*

1. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, $\ldots$, n, n.

Решение. База для $k = 1$ очевидна. Пусть для k граф с $2k$ вершинами существует, докажем для $k+1$. Возьмём граф с $2k$ вершинами и разобьём его вершины на две части так, чтобы в каждой части были вершины степени $1, 2, \ldots, n$. Добавим две новые вершины, одну из них соединим со всеми вершинами одной из частей, а также с еще одной новой. Несложно понять, что полученный граф удовлетворяет условию.

2. В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что стартуя из некоторого города, можно проехать по всем городам, побывав в каждом по одному разу.

Решение. Докажем утверждение задачи индукцией по количеству вершин. База для 2 городов очевидна. Предположим, что утверждение верно для n городов, докажем для $n+1$ города. Выкинем один из городов B и все дороги, с концом в этом городе. По предположению индукции в оставшемся графе существует путь A_1, A_2, $\ldots$, A_n по всем городам. Вернём город B. Если дорога ведёт из города B в A_1, то начав с B, можно пройти обойти все города. Заметим, что если для некоторого k из города A_k дорога ведёт в B, а из B дорога ведёт в A_{k+1}, то все города можно обойти следующим образом: $A_1 \to \ldots \to A_k \to B \to A_{k+1} \to \ldots \to A_n$. Если такого k не существует, то в город B ведёт дорога из каждого из городов A_1, $\ldots$, A_n, поэтому города можно обойти следующим образом: $A_1 \to \ldots \to A_n \to B$.

3. Усадьбы любых двух графов в Истринском районе соединены либо водным, либо сухопутным сообщением. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы любой граф мог по-прежнему добраться до любого другого.

Решение. Для двух городов утверждение очевидно. Пусть верно для n городов, докажем для $n+1$. Пусть сухопутные дороги — это ребра красного цвета, а водные — синего. Выкинем одну вершину B и все ребра, ведущие из неё. Для остальных городов верно предположение индукции, то есть можно оставить только ребра какого-то цвета (без ограничения общности синего) так, что граф будет связным. Вернём вершину B. Если из вершины B выходит хотя бы одно ребро синего цвета, то если оставить только ребра синего цвета, то граф по-прежнему будет связным. Если же из вершины B выходят только рёбра красного цвета, то уберём все рёбра синего цвета. Оставшийся граф будет связным, поскольку от любой вершины можно добраться до любой через вершину B.

4. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой не более чем с одной пересадкой.

Решение. Для двух городов утверждение очевидно. Пусть верно для n городов, докажем для $n+1$. Выкинем некоторую вершину B и все рёбра, с концом в этой вершине. Для оставшегося графа верно предположение индукции, то есть существует вершина A такая, что из него можно добраться до любой другой по не более, чем 2 рёбрам. Пусть из вершины A напрямую можно добраться в вершины $C_1, \ldots, C_k$, а только через другую вершину — в $D_1, \ldots, D_l$. Если из вершины A или из какой-нибудь из вершин $C_1, \ldots, C_k$ ребро ведёт в B, то вершина A по-прежнему подходит. Если же во все эти вершины ведут рёбра из B, то подойдёт вершина B: в вершины $A, C_1, \ldots, C_k$ можно попасть непосредственно, а в вершины $D_1, \ldots, D_l$ — через вершины $C_1, \ldots, C_k$.

5. В компании из n человек среди любых четверых есть знакомый с остальными тремя. Докажите, что есть человек, который знает всех остальных.

Решение. База для 4 человек очевидна. Пусть утверждение задачи верно для n, докажем для $n+1$. Выкинем одну вершину B и все рёбра, ведущие из неё. Для оставшихся n по предположению индукции найдётся вершина A, соединённая со всеми остальными. Если все остальные вершины также соеденины между собой, то утверждение задачи очевидно — вершина, соседняя с B, будет искомой. Если же найдутся две вершины C и D, не соединённые ребром, то рассмотрим четвёрку A, B, C, D. Заметим, что C и D не могут быть соединены со всеми, поскольку они не соединены между собой. Поэтому это будет одна из вершин A или B, но тогда эти вершины соединены ребром, то есть A — искомая вершина.