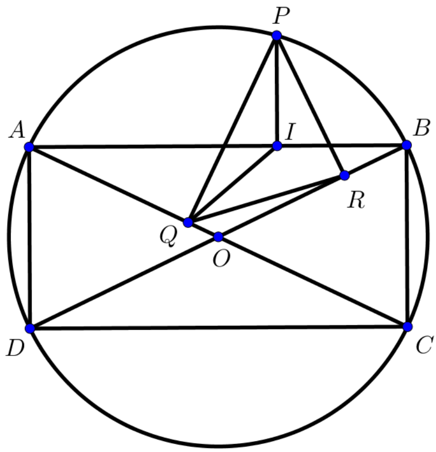
9 класс	Вписанные углы 2	17 октября 2016

1. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB и AC в точках D и E. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ADE лежит на первой окружности.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ADE, а $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle DIE = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$. Но $\angle DEC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$, поэтому I лежит на окружности.

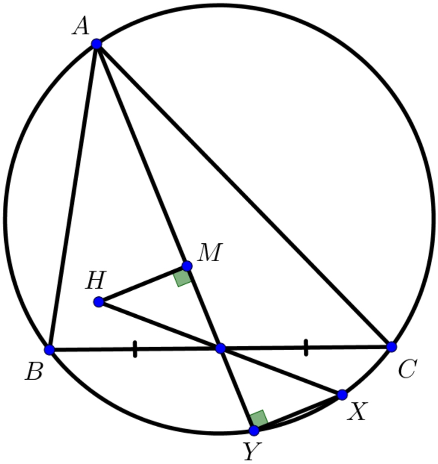
3. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружнсть. Из произвольной точки P дуги AB опущены перпендикуляры PI, PQ, PR на AB, AC, BD соответственно. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника PQR.

Решение. Обозначим через O точку пересечения диагоналей прямоугольника. Докажем, что QI является биссектрисой угла PQR, аналогично доказывается, что RI является биссектрисой угла PRQ. Заметим, что четырёхугольник $AQIP$ является вписанным, поэтому $\angle PAI = \angle PQI$. С другой стороны, $\angle POR = 2\angle PAB$, поскольку угол POB — центральный. Из вписанности четырёхугольника $PQOR$ следует, что $\angle PQR = \angle POR$. Поэтому угол PQI в два раза меньше угла PQB, откуда следует требуемое.



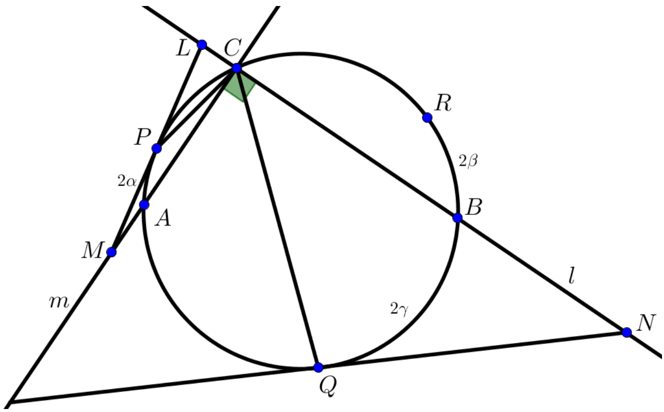
4. На окружности даны точки A, B, M, N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

Решение. Пусть X и Y — основания перпендикуляров из точки M на прямые AN и BN соответственно. Тогда четырёхугольник $MNXY$ вписанный, откуда $\angle ANB = \angle A_1MB_1$. Поэтому дуги AB_1 и BA_1 равны. Отняв общую дугу AA_1 получим, что дуги A_1B_1 и AB равны, то есть прямые AA_1 и BB_1 параллельны.



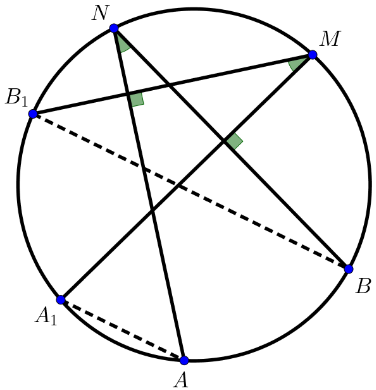
6. H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, M — проекция ортоцентра на медиану, проведенную из вершины A. Докажите, что четырёхугольник $BHMC$ вписанный.

Решение. Пусть точка X симметрична H относительно середины стороны, Y — точка пересечения прямой AM с описанной окружностью. Заметим, что $XY \perp AX$. При симметрии относительно середины стороны точка X переходит в точку H, а точка Y — в основание перпендикуляра из точки H на прямую AM, то есть в точку M. При этой симметрии описанная окружность треугольника ABC переходит в описанную окружность $BHMC$.



7. Две перпендикулярные прямые l и m пересекаются в точке C на окружности ω так, что они разбивают окружность на три дуги AC, AB и BC. На каждой дуге отмечены точки P, Q и R и в этих точках провели касательные к ω. Оказалось, что отрезок каждой касательной, заключенный между прямыми l и m, делится точкой касания пополам. Докажите, что точки P, Q, R являются вершинами правильного треугольника.

Решение. Обозначим величину дуг AP, BR и BQ за 2α, 2β, 2γ соответственно. Пусть касательная в точке P пересекает прямые l и m в точках L и M соответственно. Поскольку PC является медианой в прямоугольном треугольнике, то $\alpha = \angle PCM = \angle PMC$. Но угол PMC равен полуразности дуг PC и AP, откуда дуга PC равна 4α. Аналогично дуга CR равна 4β. Поэтому дуга PR равна $4\alpha+4\beta$, то есть $2/3$ дуги AB. Поскольку дуга AB равна $180°$, то $\angle PQR = 60°$.



Обозначим точку пересечения касательной в точке Q с прямой l через N. Тогда $\gamma = \angle BCQ = \angle CNQ$. Но угол CNQ равен полуразности дуг CQ и BQ. Поскольку дуга BQ равна 2γ, то $\gamma = (180° - 2\gamma + 6\alpha - 2\gamma)/2$, откуда $2\gamma = 60° + 2\alpha$. Тогда $\angle RPQ = (2\gamma + 2\beta)/2 = 60°$.

8. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, AD — высота. Внутри треугольника ABC отметили точку X такую, что $\angle AXB = \angle DXM = 90°$. Докажите, что $\angle XMB = 2\angle MBC$.

Решение. Обозначим через N середину стороны AB. Поскольку $MN \parallel BC$, то $\angle MBC = \angle NMB$. Поэтому достаточно доказать, что MN является биссектрисой угла XMB. Заметим, что четырехугольник $AXDB$ вписанный, поэтому

$$\angle BXD = \angle BAD = 90° - \angle ABC, \quad \angle BXM = 180° - \angle ABC = \angle BNM,$$

то есть четырехугольник $BNXM$ вписанный. Поскольку $NA = BN = NX$, то углы, опирающиеся на дуги BN и NX равны, то есть MN — биссектриса угла BMX.