

1. Шифр — это число, которое может начинаться с нуля. Будем в наборе из ста некоторых трёхзначных шифров убирать из всех шифров одновременно первую, вторую или третью цифру. Существует ли такой набор из ста трёхзначных шифров такой, что после каждой из трех этих операций получается сто различных двузначных шифров?

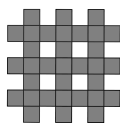
Решение. Да, существуют. В качестве первых двух цифр возьмём все возможные сочетания, в качестве третьей в каждом шифре — сумму первых цифр по модулю 10. Тогда если одна из двух первых цифр совпадает, то третьи цифры обязательно будут различными.

2. Коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ изменили не более, чем на 0,001. Мог ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 1000?

Решение. Да, могли. Рассмотрим уравнения $x^2 - 2px + p^2 = 0$ и $x^2 - 2(p+a)x + p^2 = 0$, где $p = 10^9$, $a = 5 \cdot 10^{-4}$. Тогда у первого уравнения единственный корень p , а у второго уравнения наибольший корень равен

$$p + a + \sqrt{p^2 + 2ap + a^2 - p^2} > p + \sqrt{2ap} = p + 1000.$$

3. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать по границам клеток фигуру, изображённую ниже?



Решение. Рассмотрим шахматную раскраску фигуры. Заметим, что количество клеток одного цвета ровно на 15 больше, чем клеток второго цвета. В любом прямоугольнике количество клеток разных цветов различается не более, чем на 1. Поэтому прямоугольников будет не менее 15. Пример на 15 легко строится.