9 класс	Дорешивание	13 октября 2016

Ниже представлены задачи, на которые мы рекомендуем обратить внимание.

1. (*Разнобой, 7*) Для вещественных чисел x, y и z, принадлежащих отрезку $[0, 1]$, докажите неравенство

$$2(xy + yz + zx) \leqslant 3xyz + x + y + z.$$

2. (*Разнобой, 9*) Докажите, что для любого простого p существует бесконечно много чисел вида $2^n - n$, кратных p.

3. (*Подсчёт двумя способами, 7*) Туристическая фирма провела акцию: "Купи путевку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно". За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

4. (*Неравенства, 3*) Решите уравнение $(1 + x^{2016})(1 + x)^{2014} = (2x)^{2015}$.

5. (*Неравенства, 7*) Решите уравнение $x^4 + 4xy^2 + 2y^4 + 1 = 0$.

6. (*Высоты и середины, 5*) В остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями высот. Пусть O_A, O_B, O_C — центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно. Докажите, что треугольник $O_AO_BO_C$ равен серединному треугольнику.

7. (*Красим графы, 6*) Каждый из 2016 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно выбрать 672 депутатов, которые не выясняли отношения указанным выше способом.

8. (*Теория чисел, 3*) О натуральных числах a, p, q известно, что $ap + 1$ делится на q, а $aq + 1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

9. (*Теория чисел, 6*) Учитель написал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашел из наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

10. (*Зацикливание, 6*) Пусть a и n — взаимно простые числа. Докажите, что последовательность остатков от деления чисел 1, a, a^2, $a^3, \ldots$ на n периодическая и не содержит предпериода.

11. (*Зацикливание, 8*) Государство Элмышатия всегда существовало и всегда будет существовать. Каждый день в этом государстве либо идёт дождь, либо бушует буря, либо светит солнце. Известно, что погода в данный день однозначно определяется погодой за предшествующую четырёхдневку. Всю последнюю четырёхдневку шёл дождь. Докажите, что и до, и после этого дождливых четырёхдневок было бесконечно много.

9 класс	Дорешивание	13 октября 2016

Ниже представлены задачи, на которые мы рекомендуем обратить внимание.

1. (*Разнобой, 7*) Для вещественных чисел x, y и z, принадлежащих отрезку $[0, 1]$, докажите неравенство

$$2(xy + yz + zx) \leqslant 3xyz + x + y + z.$$

2. (*Разнобой, 9*) Докажите, что для любого простого p существует бесконечно много чисел вида $2^n - n$, кратных p.

3. (*Подсчёт двумя способами, 7*) Туристическая фирма провела акцию: "Купи путевку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно". За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

4. (*Неравенства, 3*) Решите уравнение $(1 + x^{2016})(1 + x)^{2014} = (2x)^{2015}$.

5. (*Неравенства, 7*) Решите уравнение $x^4 + 4xy^2 + 2y^4 + 1 = 0$.

6. (*Высоты и середины, 5*) В остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями высот. Пусть O_A, O_B, O_C — центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно. Докажите, что треугольник $O_AO_BO_C$ равен серединному треугольнику.

7. (*Красим графы, 6*) Каждый из 2016 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно выбрать 672 депутатов, которые не выясняли отношения указанным выше способом.

8. (*Теория чисел, 3*) О натуральных числах a, p, q известно, что $ap + 1$ делится на q, а $aq + 1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

9. (*Теория чисел, 6*) Учитель написал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашел из наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

10. (*Зацикливание, 6*) Пусть a и n — взаимно простые числа. Докажите, что последовательность остатков от деления чисел 1, a, a^2, $a^3, \ldots$ на n периодическая и не содержит предпериода.

11. (*Зацикливание, 8*) Государство Элмышатия всегда существовало и всегда будет существовать. Каждый день в этом государстве либо идёт дождь, либо бушует буря, либо светит солнце. Известно, что погода в данный день однозначно определяется погодой за предшествующую четырёхдневку. Всю последнюю четырёхдневку шёл дождь. Докажите, что и до, и после этого дождливых четырёхдневок было бесконечно много.