9 класс	Зацикливание	10 октября 2016

1. a) На доске отмечено несколько точек. Из каждой точки проведена ровно одна стрелка в какую-то из других точек. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, рано или поздно начнешь ходить по циклу.

Решение. Выберем произвольную точку и пойдём из нее по стрелкам. Заметим, что в какой-то момент мы придем в вершину, в которой уже были. Далее мы пойдём по циклу.

b) Докажите, что если, кроме того, в каждую из точек ведет ровно одна стрелка, то, начав из любой точки, рано или поздно попадешь в нее снова.

Решение. Заметим, что мы не можем прийти не в начальную вершину, поскольку тогда будет вершина, в которую ведет не менее двух стрелок.

2. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские политологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен "Актом о демократии", в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов зациклится, и оцените как-нибудь длину периода.

Решение. Будем говорить, что десятка A следует из десятки B, если B получается из A следующим образом: добавляем в конец президента, следующего из A, и убираем первого президента. Рассмотрим в качестве точек десятки, проведём из точки A стрелку в точку B, если из A следует B. По предыдущей задаче с определенного момента партийность президентов зациклится. Поскольку количество возможных десяток равно 2^{10}, поэтому длина периода не больше, чем $2^{10}+9$.

3. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что его можно вернуть в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

Решение. Количество различных состояний Кубика Рубика конечно (например, не больше 54!). Будем говорить, что из состояния A Кубика Рубика следует состояние B, если применив к состоянию A

комбинацию из условия, мы получим состояние B. Заметим, что из различных состояний A и B не может следовать состояние C. Действительно, предположим, что последовательность поворотов $P_1P_2\dots P_n$. Тогда, сделав комбинацию поворотов $P_n^{-1}\dots P_2^{-1}P_1^{-1}$, мы должны получить и состояние A, и состояние B, противоречие. По первой задаче мы зациклимся без предпериода, поэтому начальное состояние повторится.

6. Пусть a и n — взаимно простые числа. Докажите, что последовательность остатков от деления чисел $1, a, a^2, a^3, \dots$ на n периодическая и не содержит предпериода.

Решение. Заметим, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, поэтому последовательность будет периодической с периодом $\varphi(n)$.

7. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится.

Решение. В качестве состояний будем рассматривать город, в котором находится рыцарь, дорога, по которой он пришёл, и дорога, по которой он выйдет. Количество состояний конечно, поэтому процесс зациклится, причём без предпериода.