9 класс **Теория чисел** 6 октября 2016

1. Существуют ли такие двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

2. При каких натуральных n число $n^3 + 2n^2 + 11$ является кубом натурального числа?

3. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap + 1$ делится на q, а $aq + 1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

4. Решите в целых числах систему уравнений $\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$

5. Найдите все n такие, что сумма цифр числа 5^n равна 2^n.

6. Учитель написал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашел из наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

7. Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет хотя бы n различных простых делителей.

8. Для каждого натурального $n > 1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число $d_n + d_{n+1}$ является точным квадратом.

9 класс **Теория чисел** 6 октября 2016

1. Существуют ли такие двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

2. При каких натуральных n число $n^3 + 2n^2 + 11$ является кубом натурального числа?

3. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap + 1$ делится на q, а $aq + 1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

4. Решите в целых числах систему уравнений $\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$

5. Найдите все n такие, что сумма цифр числа 5^n равна 2^n.

6. Учитель написал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашел из наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

7. Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет хотя бы n различных простых делителей.

8. Для каждого натурального $n > 1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число $d_n + d_{n+1}$ является точным квадратом.