9 класс	Теория чисел	6 октября 2016

1. Существуют ли такие двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{abcd}$?

Решение. Заметим, что

$$\overline{abcd}=\overline{ab}\cdot 100+\overline{cd}>\overline{ab}\cdot 99\geqslant\overline{ab}\cdot\overline{cd},$$

поэтому равенство невозможно.

2. При каких натуральных n число n^3+2n^2+11 является кубом натурального числа?

Решение. Заметим, что $n=1$ не подходит, а $n=2$ — подходит. Пусть $n\geqslant 3$. Тогда докажем, что $n^3+2n^2+11<(n+1)^3$. Действительно, это неравенство равносильно тому, что $n^2+3n-10>0$, а оно верно при $n\geqslant 3$.

3. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a>\frac{pq}{2(p+q)}$.

Решение. Из условия следует, что число

$$(ap+1)(aq+1)=a^2pq+ap+aq+1$$

делится на pq, поэтому и $ap+aq+1$ делится на pq. Тогда

$$2(ap+aq)>ap+aq+1\geqslant pq,$$

что равносильно нужному неравенству.

4. Решите в целых числах систему уравнений $\begin{cases} xy+z=94,\\ x+yz=95.\end{cases}$

Решение. Отнимем из второго уравнение первое. Получим, что $(1-y)(x-z)=1$. Поскольку обе скобки целые, то они либо обе равны 1, либо обе равны -1. В первом случае получаем решение $x=95$, $y=0$, $z=94$, а во втором — $x=31$, $y=2$, $z=32$.

5. Найдите все n такие, что сумма цифр числа 5^n равна 2^n.

Решение. Заметим, что $n=1,2,4,5$ условие не выполняется, а при $n=3$ — выполняется. Докажем, что при $n\geqslant 6$ сумма цтфр числа 5^n меньше, чем 2^n. Сумма цифр числа 5^n не превосходит $9(n+1)$, поскольку $5^n<10^n$, а у числа 10^n ровно $n+1$ цифра. Неравенство

$2^n > 9(n+1)$ выполнено при $n \geqslant 6$ (легко доказывается по индукции), поэтому при $n \geqslant 6$ условие задачи не может быть выполнено.

6. Учитель написал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашел из наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

Решение. Рассмотрим, сколько из шести чисел могут делиться на данное простое число p. Если среди исходных 4 чисел на p делится соответственно 0, 1, 2, 3, 4 числа, то среди 6 НОДов на p будут делится 0, 0, 1, 3, 6 чисел. Поскольку у нас ровно 2 числа из известных чётные, то N делится на 2. Поскольку по одному из выписанных чисел делится на 3, 4 и 5, то N не делится на 3, 4 и 5. Минимальное N, удовлетворяющее этим условиям, это 14. Пример для $N = 14$: 4, 15, 70, 84.

7. Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет хотя бы n различных простых делителей.

Указание. Разложим n раз выражение $2^{2^n} - 1$ по формуле разности квадратов. Получим

$$2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \ldots (2^{2^0} + 1)(2 - 1).$$

Докажите, что НОД$(2^{2^k} + 1, 2^{2^m} + 1) = 1$ при $k \neq m$, откуда будет следовать утверждение задачи.