9 класс Графы. Красим и расширяем 3 октября 2016

1. В кружок поступили 20 школьников, среди которых Вася и Петя. Оказалось, что каждый из поступивших знает ровно четверых других, а у Васи и Пети трое общих знакомых. Докажите, что среди поступивших в кружок есть школьник, не знакомый ни с Васей, ни с Петей и даже не имеющий ни с кем из них общих знакомых.

2. Степень каждой вершины графа не превосходит d. Докажите, что его вершины можно правильно покрасить в $d+1$ цвет.

3. a) Степень любой вершины графа не превосходит d. Известно, что от любой вершины до любой другой можно дойти не более, чем по двум рёбрам. Докажите, что в графе не более d^2+1 вершины.

b) Степень любой вершины графа не превосходит d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в d^2+1 цвет так, что расстояние между любыми двумя вершинами одного цвета было более двух рёбер.

4. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.

5. Докажите, что любой граф можно раскрасить в два цвета так, чтобы разноцветных рёбер было не меньше, чем одноцветных.

6. Каждый из 2016 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно выбрать 672 депутатов, которые не выясняли отношения указанным выше способом.

7. В графе на $2n$ вершинах нет трёх попарно соединённых вершин. Докажите, что в нём не более n^2 рёбер.

9 класс Графы. Красим и расширяем 3 октября 2016

1. В кружок поступили 20 школьников, среди которых Вася и Петя. Оказалось, что каждый из поступивших знает ровно четверых других, а у Васи и Пети трое общих знакомых. Докажите, что среди поступивших в кружок есть школьник, не знакомый ни с Васей, ни с Петей и даже не имеющий ни с кем из них общих знакомых.

2. Степень каждой вершины графа не превосходит d. Докажите, что его вершины можно правильно покрасить в $d+1$ цвет.

3. a) Степень любой вершины графа не превосходит d. Известно, что от любой вершины до любой другой можно дойти не более, чем по двум рёбрам. Докажите, что в графе не более d^2+1 вершины.

b) Степень любой вершины графа не превосходит d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в d^2+1 цвет так, что расстояние между любыми двумя вершинами одного цвета было более двух рёбер.

4. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.

5. Докажите, что любой граф можно раскрасить в два цвета так, чтобы разноцветных рёбер было не меньше, чем одноцветных.

6. Каждый из 2016 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно выбрать 672 депутатов, которые не выясняли отношения указанным выше способом.

7. В графе на $2n$ вершинах нет трёх попарно соединённых вершин. Докажите, что в нём не более n^2 рёбер.