

Дан остроугольный неравносторонний треугольник ABC ; AA_1 , BB_1 , CC_1 — его высоты; H — ортоцентр; O — центр описанной окружности.

1. Докажите, что H является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

2. а) Докажите, что точка, симметричная H относительно стороны BC лежит на описанной окружности треугольника ABC .

б) Докажите, что точка X , симметричная H относительно середины стороны, лежит на описанной окружности треугольника ABC , причём AH — диаметр описанной окружности треугольника ABC .

3. Докажите, что $OA \perp B_1C_1$.

4. Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой AC , лежит на прямой B_1C_1 .

5. Пусть O_A , O_B , O_C — центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C соответственно. Докажите, что треугольник $O_AO_BO_C$ равен серединному треугольнику.

6. Докажите, что точки H , A_1 и середины высот BB_1 и CC_1 лежат на одной окружности.

7. Точки P и Q выбраны так, что $BOAP$ и $COPQ$ — параллелограммы. Докажите, что Q совпадает с H .

8. Окружность с центром B и радиусом BB_1 пересекает прямую A_1C_1 в точках K и L (K и A лежат по одну сторону от BB_1). Докажите, что точка пересечения AK и CL лежит на прямой BO .

9. Пусть точка H' симметрична H относительно стороны BC , а прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке K . Докажите, что точки A , K , H' и середина стороны BC лежат на одной окружности.

Дан остроугольный неравносторонний треугольник ABC ; AA_1 , BB_1 , CC_1 — его высоты; H — ортоцентр; O — центр описанной окружности.

1. Докажите, что H является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

2. а) Докажите, что точка, симметричная H относительно стороны BC лежит на описанной окружности треугольника ABC .

б) Докажите, что точка X , симметричная H относительно середины стороны, лежит на описанной окружности треугольника ABC , причём AH — диаметр описанной окружности треугольника ABC .

3. Докажите, что $OA \perp B_1C_1$.

4. Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой AC , лежит на прямой B_1C_1 .

5. Пусть O_A , O_B , O_C — центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C соответственно. Докажите, что треугольник $O_AO_BO_C$ равен серединному треугольнику.

6. Докажите, что точки H , A_1 и середины высот BB_1 и CC_1 лежат на одной окружности.

7. Точки P и Q выбраны так, что $BOAP$ и $COPQ$ — параллелограммы. Докажите, что Q совпадает с H .

8. Окружность с центром B и радиусом BB_1 пересекает прямую A_1C_1 в точках K и L (K и A лежат по одну сторону от BB_1). Докажите, что точка пересечения AK и CL лежит на прямой BO .

9. Пусть точка H' симметрична H относительно стороны BC , а прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке K . Докажите, что точки A , K , H' и середина стороны BC лежат на одной окружности.