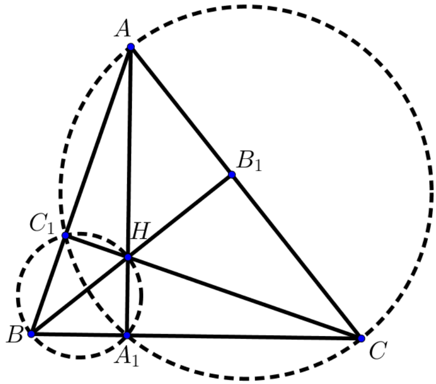
9 класс	Ортоцентр и середины	29 сентября 2016

Для треугольника ABC отметим 4 точки – ортоцентр H и основания высот A_1, B_1, C_1. Тогда на получившейся картинке можно найти 6 вписанных четырёхугольников: BC_1HA_1 и 3 аналогичных, AC_1A_1C и 3 аналогичных.



1. Докажите, что H является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

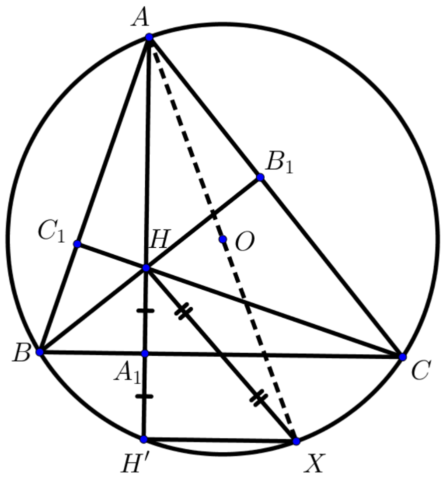
Решение. $\angle C_1A_1H = \angle C_1BH$ из вписанности четырёхугольника BC_1HA_1, $\angle HA_1B_1 = \angle HCB_1$ из вписанности четырёхугольника CB_1HA_1, $\angle C_1BH = \angle HCB_1$ из вписанности четырёхугольника BC_1B_1C. Отсюда $\angle C_1A_1H = B_1A_1H$, аналогично доказывается равенство двух других пар углов.

2. a) Докажите, что точка, симметричная H относительно стороны BC лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть H' — точка, симметричная H относительно BC. Заметим, что $\angle BHC = \angle C_1HB_1 = 180° - \angle A$. Тогда $\angle BH'C + \angle A = \angle BHC + \angle A = 180°$.

b) Докажите, что точка X, симметричная H относительно середины стороны BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC, причём AX — диаметр описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Заметим, что $HBXC$ — параллелограмм, поэтому $\angle BXC = \angle BHC$, откуда точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC. Заметим, что в треугольнике $HH'X$ прямая BC проходит через середины двух сторон, поэтому она параллельна $H'X$, откуда $\angle AH'X = 90°$, то есть AX — диаметр.



3. Докажите, что $OA \perp B_1C_1$.

Решение. Поскольку $H'X \parallel BC$, то дуги BH' и CX равны, поэтому равны углы BAH и CAO. Из вписанности BC_1B_1C следует, что $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$, откуда следует указанная перпендикулярность.

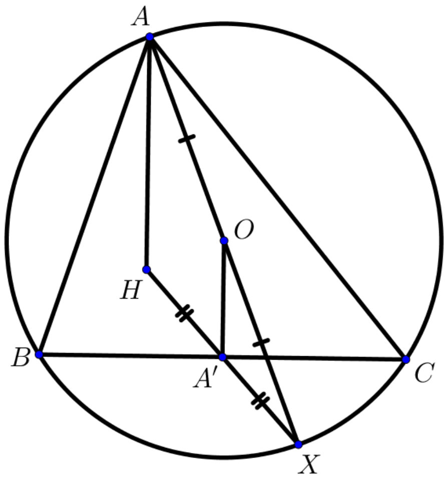
5. Пусть O_A, O_B, O_C — центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно. Докажите, что треугольник $O_AO_BO_C$ равен серединному треугольнику.

Решение. Заметим, что AH — диаметр описанной окружности треугольника AB_1C_1, поэтому O_A является серединой AH, аналогично точки O_B и O_C являются серединами отрезков BH и CH. Поэтому треугольник $O_AO_BO_C$ подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, как и серединный треугольник.

7. Точки P и Q выбраны так, что $BOAP$ и $COPQ$ — параллелограммы. Докажите, что Q совпадает с H.

Решение. Докажем вспомогательную лемму: если A' — середина стороны BC, то $AH = 2OA'$. Рассмотрим точку X из задачи 2b). Заметим, что OA' — средняя линия в треугольнике AHX, откуда следует нужное утверждение.

Вернемся к решению задачи. Заметим, что $BOAP$ — это ромб, поэтому $OP\ perpAB$, причем длина отрезка OP в два раза больше расстояния от точки O до середины стороны AB. Заметим, что $OP \parallel CH$ и $OP = CH$, поэтому H совпадает с точкой Q.


A
O
H
B
A'
C
X