

1. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее значение наибольшего из этих чисел.

2. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^3 y^2 = 15^{15} \cdot 20^{20}?$$

3. Докажите, что последовательность последних цифр чисел $7^7, 7^{7^7}, 7^{7^{7^7}}, \dots$ является периодической.

4. Сумма трёх чисел равна нулю. Может ли сумма их попарных произведений быть положительной?

5. Известно, что $b - c > a > 0$. Обязательно ли уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня?

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

7. Для вещественных чисел x, y и z , принадлежащих отрезку $[0, 1]$, докажите неравенство

$$2(xy + yz + zx) \leq 3xyz + x + y + z.$$

8. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что

$$P(1) = 2017, \quad P(2017) = 1, \quad P(k) = k,$$

где k — целое. Найдите k .

9. Докажите, что для любого простого p существует бесконечно много чисел вида $2^n - n$, кратных p .

1. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее значение наибольшего из этих чисел.

2. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^3 y^2 = 15^{15} \cdot 20^{20}?$$

3. Докажите, что последовательность последних цифр чисел $7^7, 7^{7^7}, 7^{7^{7^7}}, \dots$ является периодической.

4. Сумма трёх чисел равна нулю. Может ли сумма их попарных произведений быть положительной?

5. Известно, что $b - c > a > 0$. Обязательно ли уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет два корня?

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

7. Для вещественных чисел x, y и z , принадлежащих отрезку $[0, 1]$, докажите неравенство

$$2(xy + yz + zx) \leq 3xyz + x + y + z.$$

8. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что

$$P(1) = 2017, \quad P(2017) = 1, \quad P(k) = k,$$

где k — целое. Найдите k .

9. Докажите, что для любого простого p существует бесконечно много чисел вида $2^n - n$, кратных p .