

Как делить будем?

Общая постановка. n жадных (завистливых) разбойников делят добычу. Мы считаем, что каждое подмножество сокровищ каждый разбойник оценивает по своему разумению в долларах. Оценка всегда неотрицательна, и если часть сокровищ разбита на две непересекающиеся части A_1 и A_2 , то оценка части A равна сумме оценок частей A_1 и A_2 . Добыча считается безгранично делимой, т. е. каждый набор сокровищ может быть разделен на любое число частей, равных с точки зрения данного разбойника. Как разделить добычу? Например, если разбойников два, то один делит на две равные, по его мнению, части, а другой выбирает.

Зависть означает, что каждый разбойник хочет получить не только не менее $1/n$ всех сокровищ, но и не меньше любого другого (по своему мнению).

A1. Пускай разбойники не завистливы, но каждый должен получить не менее $1/n$ части по своему мнению. Как им разделить добычу?

A2. Пусть теперь каждый разбойник хочет получить более $1/n$ (по своему мнению). Всегда ли они смогут разделить добычу?

A3. Зависть отсутствует, но есть договоренность о долях — m_i . Разбойник с номером i должен получить не менее чем m_i часть (по его мнению), $m_1 + \dots + m_n = 1$. Как осуществить раздел?

B. Наличие зависти. Каждый разбойник должен получить не меньше, по своему мнению, чем любой другой.

B1. Осуществить процесс дележа для $n = 3$.

B2. Существует ли алгоритм дележа для $n = 4$?

B3. Решить задачу в общем случае.

C. Разные задачи.

C1. Два человека, проголодавшиеся в пути, решили остановиться, чтобы поесть. У одного было с собой 5 хлебцев, у другого — 3. Только они собрались есть, как подошёл третий, не имевший хлеба, и попросил у них разрешения участвовать в трапезе, обещая заплатить. Они согласились. Когда все хлебцы совместными усилиями, были поровну разделены и съедены, гость заплатил 8 монет и ушёл. Как справедливо разделить полученные деньги?

C2. Пять разбойников делят добычу в 50 золотых. Делят добычу они следующим образом:

1) Самый старший из них предлагает вариант дележа добычи.

2) Все (включая самого старшего) голосуют.

3) Если за этот вариант дележа проголосует более половины разбойников, то на этом дележ добычи заканчивается.

4) В противном случае все остальные убивают самого старшего разбойника и дележ начинается снова с пункта 1).

Каждый разбойник в первую очередь хочет сохранить себе жизнь, на втором месте в его списке приоритетов стоит получение как можно большей доли. Каков будет результат дележа?

C3. Два игрока играют в безобидную игру (т. е. у обоих шансы победить одинаковы), и они договорились, что тот, кто первым выиграет 6 партий, получит весь приз. Предположим, что на самом деле игра остановилась до того, как один из них выиграл приз (например, первый игрок выиграл 5 партий, а второй — 3), Как справедливо следует разделить приз?