

**Определение.** Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались. *Плоским* графом называется изображение планарного графа на плоскости.

**1. Формула Эйлера.** Докажите, что для связного плоского графа выполнено соотношение  $V - E + F = 2$ , где  $V$  — количество вершин,  $E$  — количество ребер, а  $F$  — количество граней данного плоского графа.

**2.** В стране 15 озер, соединенных 27 каналами так, что из любого озера по этим каналам можно добраться до любого другого. Сколько островов образовано этими озерами и каналами?

**3.** Докажите, что графы  $K_5$  (полный граф на пяти вершинах) и  $K_{3,3}$  (полный двудольный граф с долями из трех вершин) не являются планарными.

**4.** Ребра графа  $K_{11}$  покрасили в красный и синий цвета. Докажите, что хотя бы один из графов, образованных ребрами одного цвета, не является планарным.

**5.** Назовем граф *сферическим*, если его можно нарисовать на сфере так, чтобы его ребра не пересекались. Докажите, что граф является сферическим тогда и только тогда, когда он планарен.

**6.** Назовем граф *торическим*, если его можно нарисовать на торе (бублике) так, чтобы его ребра не пересекались. Любой ли планарный граф является торическим? Любой ли торический граф является планарным?

Для разных поверхностей, на которых нарисован связный граф, также можно считать характеристику  $V - E + F$ . Оказывается, что если мы наложим некоторые требования на грани, образованные нашим графом, то эта величина будет постоянной, тогда мы можем говорить, что у поверхности есть *эйлерова характеристика*.

**7.** Посчитайте эйлерову характеристику **а)** сферы; **б)** тора.

**Указание.** Тор полезно рассмотреть как квадрат, у которого склеены противоположные стороны, т.е. квадрат с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  у которого для каждого  $x$  точка  $(x, 0)$  склеена с точкой  $(x, 1)$ , а точка  $(0, x)$  — с точкой  $(1, x)$ .

**8.** Посчитайте количество вершин, ребер, граней у тетраэдра, куба, призмы, пирамиды и их эйлерову характеристику. Что вы замечаете? Почему так происходит?

**9.** Классифицируйте все правильные многогранники в трехмерном пространстве.

**10.** При каких  $m, n$  графы  $K_{m,n}$  и  $K_n$  являются торическими?

**Определение.** Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались. *Плоским* графом называется изображение планарного графа на плоскости.

**1. Формула Эйлера.** Докажите, что для связного плоского графа выполнено соотношение  $V - E + F = 2$ , где  $V$  — количество вершин,  $E$  — количество ребер, а  $F$  — количество граней данного плоского графа.

**2.** В стране 15 озер, соединенных 27 каналами так, что из любого озера по этим каналам можно добраться до любого другого. Сколько островов образовано этими озерами и каналами?

**3.** Докажите, что графы  $K_5$  (полный граф на пяти вершинах) и  $K_{3,3}$  (полный двудольный граф с долями из трех вершин) не являются планарными.

**4.** Ребра графа  $K_{11}$  покрасили в красный и синий цвета. Докажите, что хотя бы один из графов, образованных ребрами одного цвета, не является планарным.

**5.** Назовем граф *сферическим*, если его можно нарисовать на сфере так, чтобы его ребра не пересекались. Докажите, что граф является сферическим тогда и только тогда, когда он планарен.

**6.** Назовем граф *торическим*, если его можно нарисовать на торе (бублике) так, чтобы его ребра не пересекались. Любой ли планарный граф является торическим? Любой ли торический граф является планарным?

Для разных поверхностей, на которых нарисован связный граф, также можно считать характеристику  $V - E + F$ . Оказывается, что если мы наложим некоторые требования на грани, образованные нашим графом, то эта величина будет постоянной, тогда мы можем говорить, что у поверхности есть *эйлерова характеристика*.

**7.** Посчитайте эйлерову характеристику **а)** сферы; **б)** тора.

**Указание.** Тор полезно рассмотреть как квадрат, у которого склеены противоположные стороны, т.е. квадрат с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  у которого для каждого  $x$  точка  $(x, 0)$  склеена с точкой  $(x, 1)$ , а точка  $(0, x)$  — с точкой  $(1, x)$ .

**8.** Посчитайте количество вершин, ребер, граней у тетраэдра, куба, призмы, пирамиды и их эйлерову характеристику. Что вы замечаете? Почему так происходит?

**9.** Классифицируйте все правильные многогранники в трехмерном пространстве.

**10.** При каких  $m, n$  графы  $K_{m,n}$  и  $K_n$  являются торическими?