9 класс Гармонические четырёхугольники 18 мая 2017

Определение. Вписанный четырёхугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

Упражнение 1. Однозначно ли гармонический четырёхугольник $ABCD$ определяется по вершинам A, B, C?

Воспоминание. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда BD — симедиана треугольника ABC.

Упражнение 2. Что происходит с гармоническим четырёхугольником при инверсии относительно одной из его вершин?

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{AD}/\overrightarrow{BD}$. Если $(A, B, C, D) = -1$, то четвёрка точек A, B, C, D называется *гармонической*.

1. а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырёхугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке B и прямой AC. Докажите, что $(A, C, M, P) = -1$.

б) Докажите, что вписанный четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D либо пересекаются на прямой AC, либо ей параллельны.

2. Пусть N – середина диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда $\angle BNC = \angle DNC$.

3. В окружности ω проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проходящая через C и середину AB, вторично пересекает ω в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

4. Пусть PA и PB — две касательные к окружности ω. Некоторая секущая, проведённая через P, пересекает ω в точках C и D (C лежит между P и D). M — середина AB. Прямая CM вторично пересекает ω в точке K. Докажите, что прямые PM, AD и BK пересекаются в одной точке.

5. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность ω, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Касательные к окружности ω в точках E и F пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BM. На отрезке BM нашлась точка P такая, что биссектрисы углов BAP и BCP пересеклись в точке Q на BM. Докажите, что $\angle AQC = 90°$.

7. В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$. Биссектрисы углов ABD и CBD пересекают стороны AD и CD в точках K и L соответственно, и окружность в точках M и N. Оказалось, что $KL \parallel MN$. Докажите, что точки M, N, O, S лежат на одной окружности, где S — середина BD.

9 класс Гармонические четырёхугольники 18 мая 2017

Определение. Вписанный четырёхугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

Упражнение 1. Однозначно ли гармонический четырёхугольник $ABCD$ определяется по вершинам A, B, C?

Воспоминание. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда BD — симедиана треугольника ABC.

Упражнение 2. Что происходит с гармоническим четырёхугольником при инверсии относительно одной из его вершин?

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{AD}/\overrightarrow{BD}$. Если $(A, B, C, D) = -1$, то четвёрка точек A, B, C, D называется *гармонической*.

1. а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырёхугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке B и прямой AC. Докажите, что $(A, C, M, P) = -1$.

б) Докажите, что вписанный четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D либо пересекаются на прямой AC, либо ей параллельны.

2. Пусть N – середина диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда $\angle BNC = \angle DNC$.

3. В окружности ω проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проходящая через C и середину AB, вторично пересекает ω в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

4. Пусть PA и PB — две касательные к окружности ω. Некоторая секущая, проведённая через P, пересекает ω в точках C и D (C лежит между P и D). M — середина AB. Прямая CM вторично пересекает ω в точке K. Докажите, что прямые PM, AD и BK пересекаются в одной точке.

5. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность ω, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Касательные к окружности ω в точках E и F пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BM. На отрезке BM нашлась точка P такая, что биссектрисы углов BAP и BCP пересеклись в точке Q на BM. Докажите, что $\angle AQC = 90°$.

7. В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$. Биссектрисы углов ABD и CBD пересекают стороны AD и CD в точках K и L соответственно, и окружность в точках M и N. Оказалось, что $KL \parallel MN$. Докажите, что точки M, N, O, S лежат на одной окружности, где S — середина BD.