9 класс

Теория чисел

15 мая 2017

1. Существуют ли 2017 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

2. Докажите, что любое натуральное n можно представить в виде разности двух натуральных чисел a и b, имеющих такое же количество простых делителей, что и n.

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ быть простым?

4. Пусть p и q — два различных простых числа. Докажите, что существуют натуральные a и b такие, что среднее арифметическое всех делителей числа $n = p^a \cdot q^b$ является натуральным числом.

5. Натуральное n таково, что число $3^n - 2^n$ является простым. Докажите, что и n является простым.

6. Дано натуральное число n. Докажите, что любое натуральное число, большее чем $\frac{n^4}{16}$, можно представить не более чем одним способом в виде произведения двух его делителей, разность между которыми не превосходит n.

7. Докажите, что существует множество A, состоящее из натуральных чисел, такое, что любое не принадлежащее ему натуральное число является средним арифметическим двух различных чисел из A, а никакое число из A этим свойством не обладает.

8. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ формулой $x_n = \frac{a^n-1}{b^n-1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.

9 класс

Теория чисел

15 мая 2017

1. Существуют ли 2017 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

2. Докажите, что любое натуральное n можно представить в виде разности двух натуральных чисел a и b, имеющих такое же количество простых делителей, что и n.

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ быть простым?

4. Пусть p и q — два различных простых числа. Докажите, что существуют натуральные a и b такие, что среднее арифметическое всех делителей числа $n = p^a \cdot q^b$ является натуральным числом.

5. Натуральное n таково, что число $3^n - 2^n$ является простым. Докажите, что и n является простым.

6. Дано натуральное число n. Докажите, что любое натуральное число, большее чем $\frac{n^4}{16}$, можно представить не более чем одним способом в виде произведения двух его делителей, разность между которыми не превосходит n.

7. Докажите, что существует множество A, состоящее из натуральных чисел, такое, что любое не принадлежащее ему натуральное число является средним арифметическим двух различных чисел из A, а никакое число из A этим свойством не обладает.

8. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ формулой $x_n = \frac{a^n-1}{b^n-1}$. Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b.