

1. Дан треугольник ABC , в котором $AB < AC$. Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью треугольника ABC . Пусть Z — точка пересечения серединного перпендикуляра к AC с внешней биссектрисой угла BAC . Докажите, то середина отрезка AB лежит на описанной окружности треугольника ADZ .

2. Дана окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите ГМТ пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

3. В треугольнике ABC отметили точки A' , B' касания сторон BC , AC с вписанной окружностью и точку G пересечения отрезков AA' и BB' . После этого сам треугольник стёрли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

4. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC , а луч OB — с OD . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F . Докажите, что $\angle AOE = \angle DOF$.

5. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D , а прямую AB — в точке M ($MB < MA$, $MD < MC$). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB . Докажите, что $\angle MKO = 90^\circ$.

6. Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC , а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC . Описанная окружность ω треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q , а прямую AH — в точках A и T . Докажите, что точка H является центром вписанной окружности треугольника PQT .

7. Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда $AHVKCLDMEN$. Около треугольников AHB , BKC , CLD , DME , ENA описали окружности. Рассмотрим точки пересечения соседних окружностей. Докажите, что 5 из них, отличные от A, B, C, D, E , лежат на одной окружности.

8. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I . Около треугольника AIB описана окружность Γ . Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y . Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z . Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ , касаются.

1. Дан треугольник ABC , в котором $AB < AC$. Пусть D — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью треугольника ABC . Пусть Z — точка пересечения серединного перпендикуляра к AC с внешней биссектрисой угла BAC . Докажите, то середина отрезка AB лежит на описанной окружности треугольника ADZ .

2. Дана окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите ГМТ пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

3. В треугольнике ABC отметили точки A' , B' касания сторон BC , AC с вписанной окружностью и точку G пересечения отрезков AA' и BB' . После этого сам треугольник стёрли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

4. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC , а луч OB — с OD . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F . Докажите, что $\angle AOE = \angle DOF$.

5. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D , а прямую AB — в точке M ($MB < MA$, $MD < MC$). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB . Докажите, что $\angle MKO = 90^\circ$.

6. Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC , а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC . Описанная окружность ω треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q , а прямую AH — в точках A и T . Докажите, что точка H является центром вписанной окружности треугольника PQT .

7. Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда $AHVKCLDMEN$. Около треугольников AHB , BKC , CLD , DME , ENA описали окружности. Рассмотрим точки пересечения соседних окружностей. Докажите, что 5 из них, отличные от A, B, C, D, E , лежат на одной окружности.

8. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I . Около треугольника AIB описана окружность Γ . Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y . Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z . Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ , касаются.