

1. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < AC$ . Пусть  $D$  — точка пересечения биссектрисы угла  $BAC$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ . Пусть  $Z$  — точка пересечения серединного перпендикуляра к  $AC$  с внешней биссектрисой угла  $BAC$ . Докажите, то середина отрезка  $AB$  лежит на описанной окружности треугольника  $ADZ$ .

2. Дана окружность и точка  $P$  внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке  $P$ . Найдите ГМТ пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

3. В треугольнике  $ABC$  отметили точки  $A'$ ,  $B'$  касания сторон  $BC$ ,  $AC$  с вписанной окружностью и точку  $G$  пересечения отрезков  $AA'$  и  $BB'$ . После этого сам треугольник стёрли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

4. Углы  $AOB$  и  $COD$  совмещаются поворотом так, что луч  $OA$  совмещается с лучом  $OC$ , а луч  $OB$  — с  $OD$ . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что  $\angle AOE = \angle DOF$ .

5. Даны полуокружность с диаметром  $AB$  и центром  $O$  и прямая, пересекающая полуокружность в точках  $C$  и  $D$ , а прямую  $AB$  — в точке  $M$  ( $MB < MA$ ,  $MD < MC$ ). Пусть  $K$  — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников  $AOC$  и  $DOB$ . Докажите, что  $\angle MKO = 90^\circ$ .

6. Пусть  $AH$  — высота остроугольного треугольника  $ABC$ , а точки  $K$  и  $L$  — проекции  $H$  на стороны  $AB$  и  $AC$ . Описанная окружность  $\omega$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $KL$  в точках  $P$  и  $Q$ , а прямую  $AH$  — в точках  $A$  и  $T$ . Докажите, что точка  $H$  является центром вписанной окружности треугольника  $PQT$ .

7. Стороны выпуклого пятиугольника  $ABCDE$  продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда  $AHVKCLDMEN$ . Около треугольников  $AHB$ ,  $BKC$ ,  $CLD$ ,  $DME$ ,  $ENA$  описали окружности. Рассмотрим точки пересечения соседних окружностей. Докажите, что 5 из них, отличные от  $A, B, C, D, E$ , лежат на одной окружности.

8. В треугольник  $ABC$  вписана окружность  $\omega$  с центром в точке  $I$ . Около треугольника  $AIB$  описана окружность  $\Gamma$ . Окружности  $\omega$  и  $\Gamma$  пересекаются в точках  $X$  и  $Y$ . Общие касательные к окружностям  $\omega$  и  $\Gamma$  пересекаются в точке  $Z$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $ABC$  и  $XYZ$ , касаются.

1. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < AC$ . Пусть  $D$  — точка пересечения биссектрисы угла  $BAC$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ . Пусть  $Z$  — точка пересечения серединного перпендикуляра к  $AC$  с внешней биссектрисой угла  $BAC$ . Докажите, то середина отрезка  $AB$  лежит на описанной окружности треугольника  $ADZ$ .

2. Дана окружность и точка  $P$  внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке  $P$ . Найдите ГМТ пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

3. В треугольнике  $ABC$  отметили точки  $A'$ ,  $B'$  касания сторон  $BC$ ,  $AC$  с вписанной окружностью и точку  $G$  пересечения отрезков  $AA'$  и  $BB'$ . После этого сам треугольник стёрли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

4. Углы  $AOB$  и  $COD$  совмещаются поворотом так, что луч  $OA$  совмещается с лучом  $OC$ , а луч  $OB$  — с  $OD$ . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что  $\angle AOE = \angle DOF$ .

5. Даны полуокружность с диаметром  $AB$  и центром  $O$  и прямая, пересекающая полуокружность в точках  $C$  и  $D$ , а прямую  $AB$  — в точке  $M$  ( $MB < MA$ ,  $MD < MC$ ). Пусть  $K$  — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников  $AOC$  и  $DOB$ . Докажите, что  $\angle MKO = 90^\circ$ .

6. Пусть  $AH$  — высота остроугольного треугольника  $ABC$ , а точки  $K$  и  $L$  — проекции  $H$  на стороны  $AB$  и  $AC$ . Описанная окружность  $\omega$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $KL$  в точках  $P$  и  $Q$ , а прямую  $AH$  — в точках  $A$  и  $T$ . Докажите, что точка  $H$  является центром вписанной окружности треугольника  $PQT$ .

7. Стороны выпуклого пятиугольника  $ABCDE$  продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда  $AHVKCLDMEN$ . Около треугольников  $AHB$ ,  $BKC$ ,  $CLD$ ,  $DME$ ,  $ENA$  описали окружности. Рассмотрим точки пересечения соседних окружностей. Докажите, что 5 из них, отличные от  $A, B, C, D, E$ , лежат на одной окружности.

8. В треугольник  $ABC$  вписана окружность  $\omega$  с центром в точке  $I$ . Около треугольника  $AIB$  описана окружность  $\Gamma$ . Окружности  $\omega$  и  $\Gamma$  пересекаются в точках  $X$  и  $Y$ . Общие касательные к окружностям  $\omega$  и  $\Gamma$  пересекаются в точке  $Z$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $ABC$  и  $XYZ$ , касаются.