9 класс **Комбинаторный разнобой** 27 марта 2017

1. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем *хорошим*. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введён хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее, чем за семь попыток?

2. Даны 8 гирек весом $1, 2, \ldots, 8$ граммов, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

3. Докажите, что число разбиений натурального N на слагаемые, не превосходящие k, равно числу разбиений N на не более чем k натуральных слагаемых. (Разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых, считаются одинаковыми.)

4. 2017 складов соединены дорогами так, что от каждого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots, x_{2017}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2017}$ кг цемента соответственно, причём $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2017}$. За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

5. На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 2017 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 2017. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, $\ldots$, за номером 2017 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

6. В команде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N спит, и т.д. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая команда осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)

7. На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?

9 класс **Комбинаторный разнобой** 27 марта 2017

1. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем *хорошим*. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введён хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее, чем за семь попыток?

2. Даны 8 гирек весом $1, 2, \ldots, 8$ граммов, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

3. Докажите, что число разбиений натурального N на слагаемые, не превосходящие k, равно числу разбиений N на не более чем k натуральных слагаемых. (Разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых, считаются одинаковыми.)

4. 2017 складов соединены дорогами так, что от каждого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots, x_{2017}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2017}$ кг цемента соответственно, причём $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2017}$. За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

5. На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 2017 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 2017. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, $\ldots$, за номером 2017 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

6. В команде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N спит, и т.д. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая команда осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)

7. На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?