9 класс — **Инверсия — 2** — 23 марта 2017

Инверсия — 2

Определение. *Углом между двумя кривыми* называется наименьший из углов между касательными к этим кривым в их общей точке.

1. Докажите, что инверсия сохраняет углы: между прямыми, между окружностью и прямой, между окружностями.

2. Докажите, что окружность, содержащая пару инверсных точек, перпендикулярна окружности инверсии.

3. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество их точек касания.

4. На плоскости взяты шесть точек $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Докажите, что если описанные окружности треугольников $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$ и $B_1A_2A_3$ проходят через одну точку, то и описанные окружности треугольников $B_1B_2A_3$, $B_1A_2B_3$ и $A_1B_2B_3$ пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что если каждая из четырёх окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касается внешним образом двух соседних, то 4 полученных точки касания лежат на одной окружности.

6. Две окружности, пересекающиеся в точке A, касаются окружности (или прямой) S_1 в точках B_1 и C_1, а окружности (или прямой) S_2 в точках B_2 и C_2 (причём касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и C_1). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2, касаются друг друга.

7. Окружность ω_A проходит через точки A и C; окружность ω_B проходит через точки B и C; центры обеих окружностей лежат на прямой AB. Окружность ω касается окружностей ω_A и ω_B, а кроме того, она касается отрезка AB в точке C_1. Докажите, что CC_1 — биссектриса треугольника ABC.

8. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC, CA как на диаметрах построены полуокружности S_1, S_2, S_3 по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх полуокружностей, если известно, что её центр удалён от прямой AC на расстояние a.

9. Окружности S_1, S_2, $\ldots$, S_n касаются двух окружностей ω_1 и ω_2 и, кроме того, S_1 касается S_2 в точке A_1, S_2 касается S_3 в точке A_2, $\ldots$, S_{n-1} касается S_n в точке A_{n-1}. Докажите, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ лежат на одной окружности или прямой.

10. Даны четыре окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Пусть ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, ω_2 и ω_3 — в точках B_1 и B_2, ω_3 и ω_4 — в точках C_1 и C_2, ω_4 и ω_1 — в точках D_1 и D_2. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности (или прямой), то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (или прямой).

9 класс — Инверсия — 2 — 23 марта 2017

Определение. *Углом между двумя кривыми* называется наименьший из углов между касательными к этим кривым в их общей точке.

1. Докажите, что инверсия сохраняет углы: между прямыми, между окружностью и прямой, между окружностями.

2. Докажите, что окружность, содержащая пару инверсных точек, перпендикулярна окружности инверсии.

3. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество их точек касания.

4. На плоскости взяты шесть точек $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Докажите, что если описанные окружности треугольников $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$ и $B_1A_2A_3$ проходят через одну точку, то и описанные окружности треугольников $B_1B_2A_3$, $B_1A_2B_3$ и $A_1B_2B_3$ пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что если каждая из четырёх окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касается внешним образом двух соседних, то 4 полученных точки касания лежат на одной окружности.

6. Две окружности, пересекающиеся в точке A, касаются окружности (или прямой) S_1 в точках B_1 и C_1, а окружности (или прямой) S_2 в точках B_2 и C_2 (причём касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и C_1). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2, касаются друг друга.

7. Окружность ω_A проходит через точки A и C; окружность ω_B проходит через точки B и C; центры обеих окружностей лежат на прямой AB. Окружность ω касается окружностей ω_A и ω_B, а кроме того, она касается отрезка AB в точке C_1. Докажите, что CC_1 — биссектриса треугольника ABC.

8. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC, CA как на диаметрах построены полуокружности S_1, S_2, S_3 по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх полуокружностей, если известно, что её центр удалён от прямой AC на расстояние a.

9. Окружности S_1, S_2, $\ldots$, S_n касаются двух окружностей ω_1 и ω_2 и, кроме того, S_1 касается S_2 в точке A_1, S_2 касается S_3 в точке A_2, $\ldots$, S_{n-1} касается S_n в точке A_{n-1}. Докажите, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ лежат на одной окружности или прямой.

10. Даны четыре окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Пусть ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, ω_2 и ω_3 — в точках B_1 и B_2, ω_3 и ω_4 — в точках C_1 и C_2, ω_4 и ω_1 — в точках D_1 и D_2. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности (или прямой), то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (или прямой).