9 класс

Инверсия

16 марта 2017

Определение. *Инверсией* относительно окружности ω с центром O радиуса R называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку $A \neq O$ в точку A' на луче OA такую, что выполняется соотношение $OA \cdot OA' = R^2$. O и R называются *центром* и *радиусом инверсии*, ω называется *окружностью инверсии.*

Упражнение 1. Найдите все неподвижные точки инверсии. Докажите, что если при инверсии точка A переходит в точку A', то точка A' переходит в точку A (точки A и A' называются *инверсными*).

Упражнение 2. Пусть AM и AN — касательные к окружности S, проведённые из точки A, A' — середина MN. Докажите, что точки A и A' инверсны относительно окружности S.

Упражнение 3. Пусть A и A', B и B' — пары инверсных точек. Докажите, что они лежат на одной окружности.

1. Докажите, что при инверсии

а) прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя;

б) прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии (и наоборот!);

в) окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр.

2. а) Пусть A и A', B и B' — пары инверсных точек относительно окружности с центром O радиуса R. Докажите, что расстояние между точками меняется как $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$.

б) Неравенство Птолемея. Докажите, что в любом выпуклом четырёхугольнике сумма произведений противоположных сторон больше либо равна произведения его диагоналей, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда четырёхугольник — вписанный.

3. а) Инверсия с центром O переводит окружность ω в окружность ω'. Докажите, что ω и ω' гомотетичны с центром O.

б) Даны две окружности. Когда существует инверсия, переводящая их в концентрические?

4. Окружность ω касается неравных окружностей ω_1 и ω_2 внешним образом в точках A и B. Докажите, что прямая AB проходит через центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2.

5. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку их касания проводится общая касательная. Докажите, что все получившиеся прямые проходят через фиксированную точку. Что это за точка?

6. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, CAP и точка P лежат на одной окружности.

9 класс

Инверсия

16 марта 2017

Определение. *Инверсией* относительно окружности ω с центром O радиуса R называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку $A \neq O$ в точку A' на луче OA такую, что выполняется соотношение $OA \cdot OA' = R^2$. O и R называются *центром* и *радиусом инверсии*, ω называется *окружностью инверсии.*

Упражнение 1. Найдите все неподвижные точки инверсии. Докажите, что если при инверсии точка A переходит в точку A', то точка A' переходит в точку A (точки A и A' называются *инверсными*).

Упражнение 2. Пусть AM и AN — касательные к окружности S, проведённые из точки A, A' — середина MN. Докажите, что точки A и A' инверсны относительно окружности S.

Упражнение 3. Пусть A и A', B и B' — пары инверсных точек. Докажите, что они лежат на одной окружности.

1. Докажите, что при инверсии

а) прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя;

б) прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии (и наоборот!);

в) окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр.

2. а) Пусть A и A', B и B' — пары инверсных точек относительно окружности с центром O радиуса R. Докажите, что расстояние между точками меняется как $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$.

б) Неравенство Птолемея. Докажите, что в любом выпуклом четырёхугольнике сумма произведений противоположных сторон больше либо равна произведения его диагоналей, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда четырёхугольник — вписанный.

3. а) Инверсия с центром O переводит окружность ω в окружность ω'. Докажите, что ω и ω' гомотетичны с центром O.

б) Даны две окружности. Когда существует инверсия, переводящая их в концентрические?

4. Окружность ω касается неравных окружностей ω_1 и ω_2 внешним образом в точках A и B. Докажите, что прямая AB проходит через центр гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2.

5. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку их касания проводится общая касательная. Докажите, что все получившиеся прямые проходят через фиксированную точку. Что это за точка?

6. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, CAP и точка P лежат на одной окружности.