9 класс | В преддверии ММО | 9 марта 2017

1. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит один из двух знаков: "поворот" или "прямо". Машинка может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машинка попадает в клетку со знаком "прямо", то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком "поворот", то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. В центральной клетке квадрата спрятаны сокровища. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности попасть в центральную клетку?

4. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы A или B (слева направо, одну за другой, по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считаться ходом). После того, как оба игрока сделают по 2017 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N. Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.

6. Красный квадрат покрывают 100 белых квадратов. При этом все квадраты одинаковы и стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один из белых квадратов так, что оставшиеся белые квадраты все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

7. Радикалом натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

8. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются внешним образом в точке M, отличной от точки пересечения диагоналей четырехугольника. Окружность, проходящая через точки A, M и C, вторично пересекает прямую, соединяющую точку M и середину AB, в точке K, а окружность, проходящая через точки B, M и D, вторично пересекает ту же прямую в точке L. Докажите, что $|MK - ML| = |AB - CD|$.

9 класс | В преддверии ММО | 9 марта 2017

1. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит один из двух знаков: "поворот" или "прямо". Машинка может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машинка попадает в клетку со знаком "прямо", то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком "поворот", то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. В центральной клетке квадрата спрятаны сокровища. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности попасть в центральную клетку?

4. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы A или B (слева направо, одну за другой, по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считаться ходом). После того, как оба игрока сделают по 2017 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120°. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N. Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.

6. Красный квадрат покрывают 100 белых квадратов. При этом все квадраты одинаковы и стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один из белых квадратов так, что оставшиеся белые квадраты все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

7. Радикалом натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

8. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются внешним образом в точке M, отличной от точки пересечения диагоналей четырехугольника. Окружность, проходящая через точки A, M и C, вторично пересекает прямую, соединяющую точку M и середину AB, в точке K, а окружность, проходящая через точки B, M и D, вторично пересекает ту же прямую в точке L. Докажите, что $|MK - ML| = |AB - CD|$.