9 класс — **Многочлены над $\mathbb{Z}$** — 27 февраля 2016

1. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $P(2) \vdots 2$, $P(3) \vdots 3$, $P(5) \vdots 5$. Докажите, что $P(30) \vdots 30$.

2. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального числа k существует натуральное n такое, что сумма $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

Определение. Многочлен $P(x)$ называется *приводимым над множеством* M, если он может быть представлен в виде $P(x) = Q(x)R(x)$, где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены ненулевой степени с коэффициентами из M.

3. Лемма Гаусса. Пусть многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами приводим над $\mathbb{Q}$. Докажите, что он приводим и над $\mathbb{Z}$.

4. Пусть p — простое число. Разложите многочлен $x^p - 1$ на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители.

5. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами, k — натуральное число. Рассмотрим многочлен $Q_k(x) = P(...P(P(x))...)$ (многочлен P применён k раз). Докажите, что многочлен $Q_k(x) - x$ имеет не более n целых корней.

6. Целые числа a, b и c таковы, что числа $a/b + b/c + c/a$ и $a/c + c/b + b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

7. (a) Докажите, что если квадратные трехчлены с целыми коэффициентами $x^2 + p_1x + q_1$, $x^2 + p_2x + q_2$ имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.

(b) Пусть приведенные многочлены $P(x), Q(x)$ с целыми коэффициентами имеют общий нецелый корень α. Докажите, что тогда они имеют еще один общий нецелый корень $\beta \neq \alpha$.

8. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n, принимающий целые значения в целых точках.

(a) Правда ли, что $P(x)$ обязательно имеет целые коэффициенты?

(b) Докажите, что многочлен $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

9. (a) Могут ли все значения многочлена с целыми коэффициентами быть простыми числами?

(b) Тот же вопрос для многочлена с вещественными коэффициентами.

9 класс — **Многочлены над $\mathbb{Z}$** — 27 февраля 2016

1. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $P(2) \vdots 2$, $P(3) \vdots 3$, $P(5) \vdots 5$. Докажите, что $P(30) \vdots 30$.

2. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального числа k существует натуральное n такое, что сумма $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

Определение. Многочлен $P(x)$ называется *приводимым над множеством* M, если он может быть представлен в виде $P(x) = Q(x)R(x)$, где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены ненулевой степени с коэффициентами из M.

3. Лемма Гаусса. Пусть многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами приводим над $\mathbb{Q}$. Докажите, что он приводим и над $\mathbb{Z}$.

4. Пусть p — простое число. Разложите многочлен $x^p - 1$ на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители.

5. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами, k — натуральное число. Рассмотрим многочлен $Q_k(x) = P(...P(P(x))...)$ (многочлен P применён k раз). Докажите, что многочлен $Q_k(x) - x$ имеет не более n целых корней.

6. Целые числа a, b и c таковы, что числа $a/b + b/c + c/a$ и $a/c + c/b + b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

7. (a) Докажите, что если квадратные трехчлены с целыми коэффициентами $x^2 + p_1x + q_1$, $x^2 + p_2x + q_2$ имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.

(b) Пусть приведенные многочлены $P(x), Q(x)$ с целыми коэффициентами имеют общий нецелый корень α. Докажите, что тогда они имеют еще один общий нецелый корень $\beta \neq \alpha$.

8. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n, принимающий целые значения в целых точках.

(a) Правда ли, что $P(x)$ обязательно имеет целые коэффициенты?

(b) Докажите, что многочлен $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

9. (a) Могут ли все значения многочлена с целыми коэффициентами быть простыми числами?

(b) Тот же вопрос для многочлена с вещественными коэффициентами.